

آموزشگاه کیمیا
دخترانه پسرا



آزمون های جامع کیمیا

آزمون ۴ گزینه ای

سال تحصیلی ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

پاسخنامه آزمون

جمعه

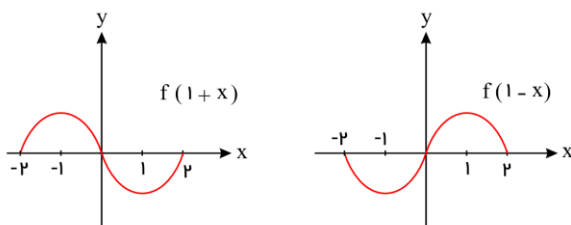
۱۱ مهرماه ۱۴۰۴

دوازدهم ریاضی دوایکس

ریاضیات

۱- پاسخ-گزینه ۴

نمودار تابع $y = f(1-x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار $f(1-x)$ ، نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ می‌بریم و برای رسم نمودار $f(1-x)$ ، نمودار تابع $f(1+x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. مطابق شکل نمودار حاصل در فاصله‌های $[-2, -1]$ و $[1, 2]$ اکیداً نزولی است.

۲- پاسخ-گزینه ۴

چون مجموع دو قدر مطلق است که ضرایب x ها برابرند پس یک تابع گلدانی است.

$$y = |2x + 1| + |2x + k| \Rightarrow y = 2 \left(\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{k}{2} \right| \right)$$

$x = \frac{a+b}{2}$ محور تقارن است و a و b ریشه‌های عبارت داخل قدر مطلق می‌باشند، لذا $a = -\frac{1}{2}$ و

$$b = -\frac{k}{2} \text{ بوده در نتیجه داریم:}$$

$$-2 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{k}{2}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{k}{2} = -4 \Rightarrow k = 7$$

۳- پاسخ- گزینه ۴

$$1 \text{ گزینه } D_f = \mathbb{R} - \{0\} \neq D_g = \mathbb{R}$$

$$2 \text{ گزینه } f(-2) = (-2)^2 = 4, \quad g(-2) = -2|-2| = -2 \times 2 = -4 \Rightarrow f(-2) \neq g(-2)$$

$$3 \text{ گزینه } f(4) = 2, \quad g(4) = 3 \Rightarrow f(4) \neq g(4)$$

$$4 \text{ گزینه } D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} = 2 = g(x) \Rightarrow f, g \text{ برابرند.}$$

۴ پاسخ گزینه ۲

برای اینکه f و f^{-1} در بیش از یک نقطه همدیگر را قطع کنند چون f خطی است پس

$$f^{-1}(x) = f(x)$$

$$f(x+1) = ax - b \xrightarrow{x \rightarrow x-1} f(x-1+1) = a(x-1) - b \Rightarrow f(x) = ax - a - b$$

چون f یک تابع اکیداً صعودی است لذا باید $a > 0$

$$f(x) = ax - a - b \Rightarrow y + a + b = ax \Rightarrow x = \frac{y+a+b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + 1 + \frac{b}{a}$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow ax - a - b = \frac{1}{a}x + 1 + \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$a = -1$ قابل قبول نیست چون تابع اکیداً صعودی است باید $a = 1$

$$-a - b = 1 + \frac{a}{b} \Rightarrow -1 - b = 1 + b \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f^{-1}(2f(3)) = f^{-1}(2 \times 3) = f^{-1}(6) = 6$$

۵- پاسخ- گزینه ۱

طول راس سهمی برابر $\frac{5}{4}$ است زیرا باید وسط $x = 0$ و $x = 5$ (دو نقطه هم عرض) باشد.

$$x_s = \frac{-b}{2a} \rightarrow \frac{5}{2} = \frac{-a}{2} \rightarrow a = -5$$

$$f(0) = 4 \rightarrow -b = 4 \rightarrow b = -4$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 5x + 4$ است.

$$\text{جمع ریشه ها} = -\frac{b}{a} = 5 \quad \text{و} \quad \text{ضرب ریشه ها} = \frac{c}{a} = 4$$

پس جمع ریشه ها یک واحد بیشتر از ضرب ریشه ها است.

۶- پاسخ- گزینه ۳

بررسی گزینه ها :

هم صعودی و هم نزولی = تابع ثابت : $[-3, 0]$ (گزینه ۱)

تابع صعودی : $[-3, +\infty)$ (گزینه ۲)

تابع اکیدا صعودی : $(-\infty, -3]$ (گزینه ۳)

تابع صعودی : $(-\infty, 0]$ (گزینه ۴)

۷- پاسخ- گزینه ۳

تابع به صورت زوج مرتب در صورتی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتبی مولف دوم یکسانی نداشته باشد در غیر این صورت باید مولفه اول هم یکسان باشد.

f^2 را برای هر یک از گزینه ها به دست می آوریم:

$$f^2 = \{(0, 0), (-2, 1), (2, 1)\} \text{ : گزینه ی «۱»}$$

$$f^2 = \{(2, 4), (3, 9), (-5, 4)\} \text{ : گزینه ی «۲»}$$

$$f^2 = \{(-1, 16), (1, 4), (4, 1)\} \text{ : گزینه ی «۳»}$$

$$f^2 = \{(3, 4), (-3, 4), (0, 0)\} \text{ : گزینه ی «۴»}$$

ملاحظه می شود فقط f^2 مربوط به گزینه ۳ شرایط یک به یک بودن را داراست.

۸- پاسخ- گزینه ۴

ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست می آوریم :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g^2(x) - 1 = 2\sqrt{3x+1}^2 - 1 = 2(3x+1) - 1 = 6x+1$$

بنابراین باید تابع وارون تابع $y = 6x+1$ را حساب کنیم:

$$y = 6x+1 \Rightarrow y-1 = 6x \Rightarrow x = \frac{y-1}{6}$$

$$\text{بنابراین: } (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$$

۹- پاسخ- گزینه ۳

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4(2x-3)} = x+1 \Rightarrow 3\sqrt{2x-3} = x+1$$

$$\Rightarrow 9(2x-3) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 3\sqrt{4-3} = 2+1 \rightarrow 3=3 \\ x=14 \rightarrow 3\sqrt{28-3} = 14+1 \rightarrow 15=15 \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول اند چون در معادل صدق می کنند.

۱۰- پاسخ- گزینه ۱

با تغییر متغیر $\sqrt{\frac{3+x}{1-2x}} = t$ خواهیم داشت:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{3+x}{1-2x} = 1 \Rightarrow 3+x = 1-2x \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

۱۱- پاسخ- گزینه ۳

دامنه توابع f و g به صورت زیر است:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$a-x \geq 0 \Rightarrow x \leq a \Rightarrow D_g = (-\infty, a]$$

چون $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, 6]$ می باشد پس می توان نتیجه گرفت که $a = 6$

همچنین داریم :

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{2-1} + \sqrt{6-2} + b = 5 \Rightarrow 1+2+b = 5 \Rightarrow b = 2$$

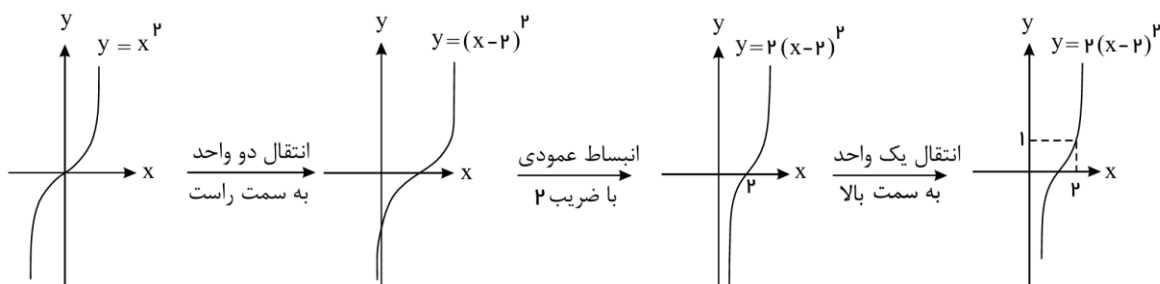
$$\Rightarrow 2a - b = 2(6) - 2 = 10$$

۱۲- پاسخ- گزینه ۱

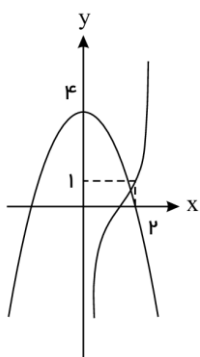
برای رسم نمودار تابع $y = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 15$ ، ابتدا ضابطه آن را ساده تر نوشته و سپس به کمک نمودار $y = x^3$ آن را رسم می کنیم:

$$y = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 15 = 2(x^3 - 6x^2 + 12x) - 15$$

$$= 2((x-2)^3 + 8) - 15 = 2(x-2)^3 + 1$$



حال با رسم این تابع و همچنین تابع $y = 4 - x^2$ در یک دستگاه مختصات داریم:



دو نمودار یکدیگر را در ناحیه اول قطع می کنند.

۱۳- پاسخ- گزینه ۱

$$x \in \mathbb{Z} : f(f(f(x))) = f(f(3)) = f(3) = 3 = f(x)$$

$$x \notin \mathbb{Z} : f(f(f(x))) = f(f(\frac{1}{3})) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} = f(x)$$

۱۴- پاسخ- گزینه ۴

$$\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \frac{3}{2x+1}$$

طبق فرض: $x^2 + x = 1 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5$
 $\Rightarrow (2x+1)^2 = 5 \Rightarrow 2x+1 = \sqrt{5}$
 حاصل عبارت $= \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = 0.6\sqrt{5}$

۱۵- پاسخ گزینه ۲

$$-2 \leq x \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \leq -2x \leq 6 \xrightarrow{+2} -4 \leq -2x+2 \leq 8$$

$$\Rightarrow -4 \leq g(x) \leq 8 \Rightarrow \text{برد تابع } g = [-4, 8]$$

۱۶- پاسخ- گزینه ۱

با توجه به اینکه تابع $Y = X$ همانی است خواهیم داشت:

$$4a + b = 4a^2 + b + 1 \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow (2a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$4a + b^2 = 2b + 1 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} 2 + b^2 = 2b + 1 \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۷- پاسخ- گزینه ۱

باید x را بر حسب y حل کنیم، که داریم:

$$y = (x-1)^3 - 1 \Rightarrow (x-1)^3 = y+1 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{y+1} \Rightarrow x = 1 + \sqrt[3]{y+1}$$

$$y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x+1}$$

پاسخنامه آزمون ۱۱ مهر آموزشگاه کیمیا

آدرس: مطهری شمالی-کوچه ۱۵ زرگری-روبه‌رو مدرسه سادات رفیعی

۱۸- پاسخ- گزینه ۴

با توجه $y = f^2 + 4f = (f + 2)^2 - 4$ داریم

$$-3 \leq f(x) < 4$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) + 2 < 6 \Rightarrow 0 \leq (f(x) + 2)^2 < 36$$

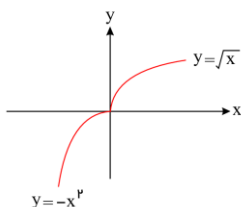
$$\Rightarrow -4 \leq (f(x) + 2)^2 - 4 < 32$$

پس برد این تابع شامل اعداد صحیح $-4, -3, \dots, 31$ است که جمعاً ۳۶ تا است

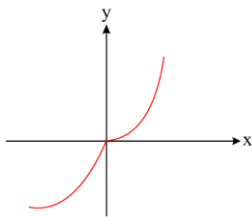
۱۹- پاسخ- گزینه ۳

$$\log_{x-2}^{x-4} \rightarrow D : \begin{cases} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 4 - x > 0 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in (2, 4) - \{3\} \\ 4 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{cases}$$

۲۰- پاسخ- گزینه ۱

نمودار تابع f به صورت زیر است:

اگر این نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم نمودار تابع وارون تابع f به دست می‌آید که به صورت زیر است.



۲۱- پاسخ- گزینه ۴

نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ و k عدد حقیقی باشد، آنگاه $|kA| = k^n |A|$.

طبق فرض داریم:

$$|A|A| = |4A| = 4^3 |A| = 4^3 \times 4 = 4^4 = 256$$

۲۲- پاسخ- گزینه ۲

ماتریس A^2 را یافته و در رابطه داده شده قرار می‌دهیم:

روش اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 13 \end{cases}$$

روش دوم: (نکته) هر ماتریس 2×2 مانند A در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + |A|I = \overline{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - 2A - 13I = \overline{O} \Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

۲۳- پاسخ- گزینه ۲

A^{-1} را از سمت چپ در رابطه ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} \underbrace{A^{-1}A}X = A^{-1}(A - 2I) \Rightarrow X = A^{-1}A - 2A^{-1}I$$

$$\Rightarrow X = I - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۲۴- پاسخ- گزینه ۳

ابتدا ماتریس $2A - B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$2A - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2A - B) \times B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = -4 + 2 + 2 + 4 = 4$$

۲۵- پاسخ- گزینه ۲

ابتدا ماتریس A^2 را یافته و از روی آن ماتریس‌های A^6 و A^9 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{cases} A^9 = (A^2)^3 \cdot A = (I)^3 \cdot A = I \cdot A = A \\ A^6 = (A^2)^3 = (I)^3 = I \end{cases}$$

$$A^9 - A^6 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

۲۶- پاسخ- گزینه ۲

حاصل ضرب دو ماتریس را به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2x - 1 + 4y & -2x + 4 \\ 4 + 3 + y & -4 + 1 \end{bmatrix}$$

درایه های خارج قطر اصلی باید صفر باشند یعنی:

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 7 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

۲۷- پاسخ- گزینه ۳

حاصل دترمینان را با بسط دادن نسبت به سطر اول محاسبه می کنیم .

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -(x-3)(4x+8) + (x-2)(6x+18) = 0$$

$$\Rightarrow -4x^2 - 8x + 12x + 24 + 6x^2 + 18x - 12x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -6$$

۲۸- پاسخ- گزینه ۱

طبق فرض داریم :

$$A^3 - 2A^2 + 3A - 2I = \bar{O} \xrightarrow{\text{طرفین در } A \text{ ضرب شود}} A^4 - 2A^3 + 3A^2 - 2A = \bar{O}$$

$$\xrightarrow{A^2 = 2A^2 - 3A + 2I} A^4 - 2(2A^2 - 3A + 2I) + 3A^2 - 2A = \bar{O}$$

$$\rightarrow A^4 - 4A^2 + 6A - 4I + 3A^2 - 2A = \bar{O} \rightarrow A^4 - A^2 + 4A - 4I = \bar{O}$$

$$\rightarrow A^4 = A^2 - 4A + 4I$$

۲۹- پاسخ- گزینه ۱

با توجه به فرض سوال و استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$A = 2A^{-1} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^2 = 2A^{-1}A \rightarrow A^2 = 2I \rightarrow A^2 - I = I$$

$$(A - I)(A + I) = I \rightarrow (A + I)^{-1} = A - I$$

۳۰- پاسخ- گزینه ۱

با توجه به فرض سوال داریم :

$$AB = B \xrightarrow{A=BA} \underbrace{BAB}_B = B \rightarrow B^r = B$$

$$BA = A \xrightarrow{B=AB} \underbrace{ABA}_A = A \rightarrow A^r = A$$

$$(A+B)(A-B) = \underbrace{A^r}_A - \underbrace{AB}_B + \underbrace{BA}_A - \underbrace{B^r}_B = 2A - 2B$$

۳۱- پاسخ- گزینه ۱

می‌دانیم برای ماتریس مربعی و وارون پذیر X رابطه $X \cdot X^{-1} = I$ برقرار است پس داریم:

$$(A-I)(A-I)^{-1} = I \rightarrow A(A-I)^{-1} - I(A-I)^{-1} = I$$

$$\rightarrow A(A-I)^{-1} = I + (A-I)^{-1}$$

$$\rightarrow A(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۳۲- پاسخ- گزینه ۳

چون دستگاه $\begin{cases} mx - ny = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد پس:

$$\frac{m}{2} = \frac{-n}{1} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = -3 \end{cases}$$

دستگاه دوم به صورت روبرو است: $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = -1 \end{cases}$

چون $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \neq \frac{1}{-1}$ پس دو خط متناظر با معادله‌های این دستگاه موازی هم بوده و در نتیجه دستگاه دوم فاقد جواب است.

۳۳- پاسخ- گزینه ۴

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

نکته: در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ در صورت وجود جواب منحصر بفرد، با فرض $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و A^{-1} (وارون ماتریس ضرایب) و $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ، جواب‌های دستگاه از دستور $X = A^{-1}B$ حاصل می‌شود.

در دستگاه $\begin{cases} ax + 4y = 7 \\ 2x + by = 4 \end{cases}$ ماتریس ضرایب بفرم $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \end{bmatrix}$ می‌باشد. پس:

$$A^{-1} = \frac{1}{ab-8} \begin{bmatrix} b & -4 \\ -2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \begin{bmatrix} 3 & c \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{b}{ab-8} & \frac{-4}{ab-8} \\ \frac{-2}{ab-8} & \frac{a}{ab-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & c \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{ab-8} = 3 \\ \frac{-4}{ab-8} = c \xrightarrow{(1)} \frac{-4}{1} = c \Rightarrow c = -4 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ \frac{-2}{ab-8} = -2 \Rightarrow ab-8 = 1 \quad (1) \\ \frac{a}{ab-8} = 3 \end{cases}$$

می‌دانیم در دستگاه فوق مجموعه جواب دستگاه از دستور $X = A^{-1}B$ حاصل می‌شود. پس:

$$x = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

پس مجموع جواب دستگاه $x + y = 3$ می‌باشد

۳۴- پاسخ- گزینه ۱

می‌دانی میانگین ۵ عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. بنابراین:

$$\frac{x + y + z + t + n}{5} = z$$

فرض: $z = 2k \Rightarrow t = 2k + 1 \Rightarrow n = 2k + 2$

$$6z + 5n = 6(2k) + 5(2k + 2) = 22k + 10 = 2(\underbrace{11k + 5}_q) = 2q$$

۳۵- پاسخ- گزینه ۲

(اثبات الف)

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

مثال نقض ب) اگر $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = -\sqrt{2}$ ، آن گاه $\alpha + \beta = 0$ عددی گویاست ولی $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ گنگ است.
اثبات پ) دو عدد متوالی را به صورت a و $a+1$ در نظر می گیریم:

$$(a+1)^3 - a^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 = \underbrace{3a(a+1)}_{2q} + 1 = \underbrace{6q+1}_{\text{فرد}}$$

مثال نقض ت) اگر $n = 3$ باشد، آن گاه داریم:

$$2^{3^2} + 1 = 2^9 + 1 = 513 = 3 \times 171 \Rightarrow \text{اول نیست}$$

پس عبارتهای ب و ت مثال نقض دارند.

۳۶- پاسخ- گزینه ۳

به کمک برهان خلف می توان ثابت کرد حاصل ضرب عبارتهای $(x_1 - y_1), (x_2 - y_2), \dots, (x_n - y_n)$ همواره زوج است.

۳۷- پاسخ- گزینه ۳

به کمک برهان خلف می توان ثابت کرد هر دو عبارت گنگ هستند. به طور مثال ثابت می کنیم $2\alpha - \beta$ گنگ است.

برهان خلف: فرض می کنیم $2\alpha - \beta$ گویا باشد

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = \underbrace{c}_{\text{گویا}} \\ \alpha + \beta = \underbrace{c'}_{\text{گویا}} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2\alpha = c + c' \rightarrow \underbrace{\alpha}_{\text{گویا}} = \underbrace{\frac{c+c'}{2}}_{\text{گویا}} \quad (\text{متناقض است})$$

۳۸- پاسخ- گزینه ۲

گزینه ۱

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2ab) + a^2 + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$

گزینه ۳

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

گزینه ۴

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 \geq 0$$

۳۹- پاسخ- گزینه ۲

$$x^2 + 5y^2 \geq 3(x + y + xy - 3) \Leftrightarrow x^2 + 5y^2 \geq 3x + 3y + 3xy - 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5y^2 - 3x - 3y - 3xy + 9 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 - 6x - 6y - 6xy + 18 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (9y^2 - 6xy + x^2) + (y^2 - 6y + 9) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (3y - x)^2 + (y - 3)^2 \geq 0 \text{ همواره درست}$$

۴۰- پاسخ- گزینه ۴

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \text{زوج} \rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \overbrace{\text{زوج}}^{2k} \Rightarrow n(n+1) = 4k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 4k \rightarrow 1 \leq 4k \leq 100 \Rightarrow 1 \leq k \leq 25 \\ \text{یا} \\ n + 1 = 4k \rightarrow n = 4k - 1 \Rightarrow 1 \leq 4k - 1 \leq 100 \Rightarrow 1 \leq k \leq 25 \end{cases}$$

پس در مجموع به ازای ۵۰ مقدار طبیعی n عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج است.

فیزیک

۴۱- پاسخ- گزینه ۴

انتقال گرما توسط پنکه سقفی در اتاق: این یک نمونه از همرفت واداشته است زیرا حرکت هوا توسط یک وسیله مکانیکی (پنکه) ایجاد می شود.

گردش آب در شופاژ خانه: در سیستم های شופاژ مدرن گردش آب معمولاً توسط پمپ انجام می شود که آن را به همرفت واداشته تبدیل می کند.

تشکیل نسیم دریا و خشکی در مناطق ساحلی: این دقیقاً یک نمونه از همرفت طبیعی است. در طول روز خشکی سریع تر از آب گرم می شود هوای بالای خشکی گرم شده چگالی اش کم می شود و بالا می رود. هوای خنک تر و سنگین تر از روی دریا به سمت خشکی حرکت می کند و نسیم دریا را ایجاد می کند. در شب این فرایند برعکس می شود. این حرکت هوا کاملاً بر اثر اختلاف دما و چگالی رخ می دهد.

خنک شدن موتور موتور سیکلت توسط فن: این نیز یک نمونه از همرفت واداشته است، زیرا فن (یک وسیله مکانیکی) جریان هوا را برای خنک کردن موتور ایجاد می کند.

۴۲- پاسخ- گزینه ۳

گرمای داده شده به یک جسم از رابطه $Q = mc\Delta T$ به دست می آید چون هر دو استوانه از یک جنس (مس) هستند، ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی آنها یکسان است.

جرم استوانه با شعاع r ، ارتفاع h و چگالی ρ برابر است با :

$$m = \rho V = \rho \pi r^2 h$$

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{m_A c \Delta \theta_A}{m_B c \Delta \theta_B} = \frac{\rho \pi r_A^2 h \Delta \theta_A}{\rho \pi r_B^2 h \Delta \theta_B} = \frac{r_A^2 \Delta \theta_A}{r_B^2 \Delta \theta_B} = \frac{3 r_A^2}{r_B^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{36} = \frac{3 r_A^2}{r_B^2} \Rightarrow \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2 = \frac{3 \times 36}{4} = 3 \sqrt{3}$$

۴۳- پاسخ- گزینه ۲

$$\Delta V_{\text{مایع}} = \Delta V_{\text{ظرف}} + 2 \Rightarrow (V_1 \beta \Delta \theta)_{\text{مایع}} = (V_1 (3\alpha) \Delta \theta)_{\text{ظرف}} + 2$$

$$\Rightarrow 1000 \times \beta \times 50 = (1000 \times 3 \times 5 \times 10^{-6} \times 50) + 2 \Rightarrow \beta = \frac{2/75}{50000} = 55 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

۴۴- پاسخ- گزینه ۲

دقت کنید که در حالت تعادل اگر دما برابر صفر درجه سلسیوس باشد می‌تواند دو حالت کلی رخ دهد.
حالت اول: همه یخ -20°C به آب 0°C و آب 20°C به آب 0°C تبدیل شود:

$$\text{آب } 20^\circ\text{C} \Leftarrow \text{آب } 0^\circ\text{C}$$

$$\text{آب } 0^\circ\text{C} \Rightarrow \text{یخ } 0^\circ\text{C} \Rightarrow \text{یخ } -20^\circ\text{C}$$

$$m' c' \Delta T' + m' L_F + m c \Delta T = 0$$

$$\Rightarrow m' (2100 \times 20 + 336000) + 500 \times 4200 (-20) = 0$$

$$m' = \frac{1000}{9} \text{ g} = 111/1 \text{ g}$$

حالت دوم: همه یخ -20°C به یخ 0°C تبدیل شود و آب 20°C نیز به یخ 0°C تبدیل شود:

پس به طور کلی می‌توان دریافت بیشترین جرم یخ می‌تواند 500 g گرم باشد تا دمای تعادل برابر صفر درجه سلسیوس شود.

۴۵- پاسخ- گزینه ۲

برای به دست آوردن گرمای نهان تبخیر باید جرم ماده را بدانیم. برای این منظور از بخش اول نمودار استفاده می‌کنیم. همانطور که ملاحظه می‌کنید $48KJ$ باعث افزایش دما (۶۰ - ۱۸۰) درجه سلسیوس مایع شده است. بنابراین:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 48000 = m \times 2000 \times (180 - 60) \Rightarrow m = 0.2 \text{ kg}$$

در بخش دوم نمودار (قسمت افقی) گرمای (۴۸-۶۴) کیلو ژول به مایع داده شده است ولی دمای آن تغییر نمی‌کند. پس این مقدار گرما صرف تبخیر مایع شده است. در نتیجه داریم:

$$Q = mL_V \Rightarrow (64 - 48) \times 10^3 = 0.2L_V \Rightarrow L_V = 80000 \text{ kJ/kg} \\ = 8 \times 10^4 \text{ kJ/kg}$$

۴۶- پاسخ- گزینه ۳

در این حالت می‌توان تغییرات زیر را در نظر گرفت:

$$\text{آب } 20^\circ\text{C} \xleftarrow{Q_3} \text{آب } 0^\circ\text{C}, \text{آب } 0^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_2} \text{یخ } 0^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_1} \text{یخ } -10^\circ\text{C} \\ 400 \times 2/1 \times 10 + 400 \times 336 + m \times 4/2 \times (-20) = 0 \\ \Rightarrow m = 1/7 \text{ kg} \Rightarrow m = 1700 \text{ g}$$

۴۷- پاسخ- گزینه ۴

برای تبخیر بخشی از آب، کل آب باید به دمای ۱۰۰ درجه برسد.

$$Q_1 = mc\Delta\theta = 100 \times 1 \times 80 = 8000 \text{ cal} \Rightarrow 20^\circ\text{آب} : 100^\circ\text{آب}$$

برای اینکه ۸۰ گرم آب داخل گرماسنج بماند باید ۲۰ گرم آب تبخیر شده باشد.

$$Q_2 = m' L_V = 20 \times 540 = 10800 \text{ cal}$$

$$Q_3 : \text{گرماسنج} = 15 \times 80 = 1200 \text{ cal}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 20000 \text{ cal} = 84000 \text{ J}$$

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow t = \frac{84000}{50} \Rightarrow t = 1680 \text{ (s)} \Rightarrow t = 28 \text{ min}$$

۴۸- پاسخ- گزینه ۱

در ابتدا تغییر دما بر حسب درجه سلسیوس را حساب می‌کنیم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow 18 = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = 10^\circ \text{C}$$

چون تغییر دما بر حسب درجه سلسیوس و کلون برابر است پس:

$$\Delta T = \Delta \theta = 10 \text{ K}$$

۴۹- پاسخ- گزینه ۴

گام اول: با توجه به اینکه در مدت صفر تا ۸s شیب خط مماس بر نمودار کاهش می‌یابد می‌توان دریافت حرکت کند شونده است.

گام دوم: شیب خط مماس بر نمودار در لحظه $t = 0$ را حساب می‌کنیم تا سرعت در این لحظه را به دست آوریم:

$$v_0 = \frac{0 - (-10)}{2} = 5 \text{ m/s}$$

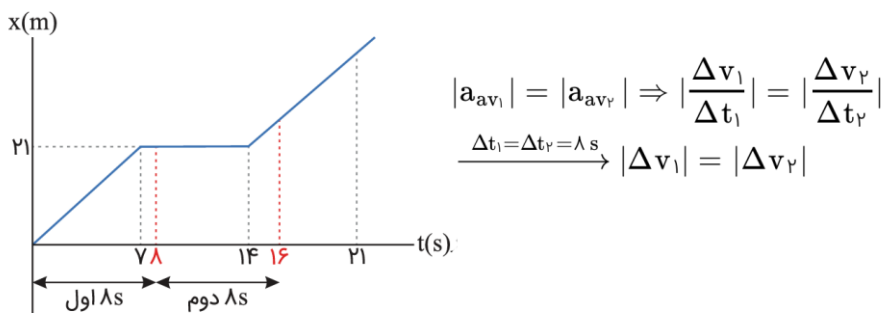
چون در لحظه $t = 8\text{s}$ شیب خط مماس بر نمودار صفر است پس سرعت در این لحظه هم صفر است.

گام سوم: از رابطه شتاب متوسط استفاده می‌کنیم:

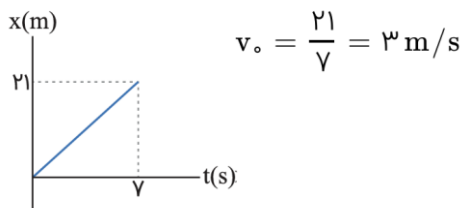
$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow |a_{av}| = \left| \frac{0 - 5}{\lambda - 0} \right| = \frac{5}{\lambda} \text{ m/s}^2$$

۵۰- پاسخ- گزینه ۲

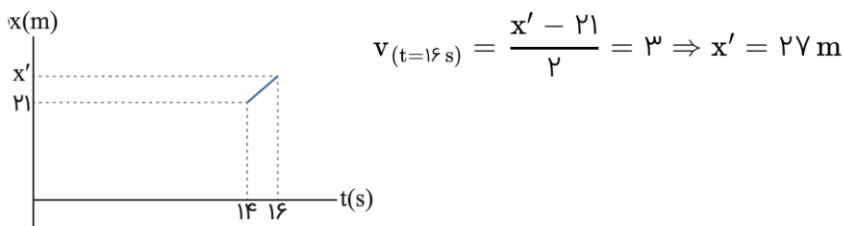
شتاب متوسط برابر $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ است:



در نمودار $x-t$ سرعت برابر شیب خط مماس است با توجه به نمودار سرعت در لحظه $t = 7 \text{ s}$ برابر صفر است پس برای آنکه تغییر سرعتها برابر باشد باید سرعت در $t = 0$ با سرعت در $t = 14 \text{ s}$ برابر باشد:



در بازه 14 s تا 21 s شیب نمودار $x-t$ ثابت و سرعت حرکت ثابت و برابر 3 m/s است.



۵۱- پاسخ- گزینه ۱

با توجه به رابطه محاسبه شتاب متوسط می توان نوشت:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8 - (-6)}{7 - 3} = \frac{14}{4} = 3.5 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = +3.5 (\text{m/s}^2) \vec{i}$$

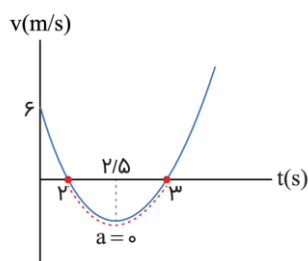
۵۲- پاسخ- گزینه ۲

گام اول: ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم می کنیم.

$$v = t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}, t = 3 \text{ s}$$

گام دوم: به بررسی هر یک از موارد می پردازیم:

الف و پ) نادرست؛ اندازه شتاب برابر اندازه شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه است. با توجه به شکل زیر اندازه شتاب در بازه $(2\text{ s}, 3\text{ s})$ ابتدا کاهش سپس افزایش یافته است.



$$\begin{cases} (2 \text{ s}, 2.5 \text{ s}) \Rightarrow |a| \downarrow, a < 0 \\ (2.5 \text{ s}, 3 \text{ s}) \Rightarrow |a| \uparrow, a > 0 \end{cases}$$

ب) درست- اندازه سرعت در بازه $(2 \text{ s}, 2.5 \text{ s})$ ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته است. بنابراین حرکت ابتدا تند شونده سپس کند شونده است.

ت) درست- سرعت همواره منفی است. پس متحرک همواره در خلاف جهت محور x در حال حرکت است بنابراین ۲ مورد ب و ت درست اند.

۵۳- پاسخ- گزینه ۳

ابتدا با استفاده از شتاب متوسط در بازه $(4s, 10s)$ سرعت متحرک در $t = 10s$ را حساب می‌کنیم.

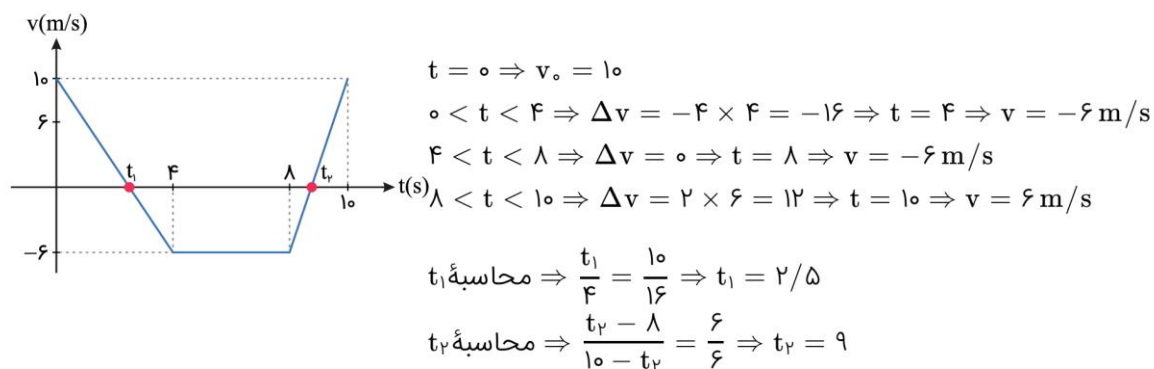
$$a_{av}(4s, 10s) = \frac{v_{10s} - v_{4s}}{10 - 4} \Rightarrow +2 = \frac{v_{10s} - 8}{6} \Rightarrow v_{10s} = 20 \text{ m/s}$$

حالا با استفاده از رابطه شتاب متوسط در بازه $(0, 10s)$ بردار سرعت در $t = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$a_{av}(0, 10s) = \frac{v_{10s} - v_0}{10 - 0} \Rightarrow -2 = \frac{20 - v_0}{10} \Rightarrow v_0 = 40 \text{ m/s}$$

۵۴- پاسخ- گزینه ۱

ابتدا نمودار سرعت-زمان این متحرک را رسم می‌کنیم.



$0 < t < t_1 \Rightarrow$ حرکت کندشونده $\Rightarrow \Delta t = 2/5 \text{ s}$

$8 < t < t_2 \Rightarrow$ حرکت کندشونده $\Rightarrow \Delta t = 9 - 8 = 1 \text{ s}$

مدت زمان حرکت کند شونده $(3/5 \text{ s})$ است.

۵۵- پاسخ- گزینه ۴

شتاب متحرکی که بر خط راست حرکت می کند برابر شیب مماس بر نمودار سرعت- زمان است بنابراین:

$$\text{از } t_1 = 0 \text{ s تا } t_2 = 4 \text{ s : } a_1 = \frac{2 - 14}{4} = -3 \text{ m/s}^2$$

(سرعت جسم ثابت و شتاب آن صفر است) $a_2 = 0 \text{ m/s}^2$ از $t_2 = 4 \text{ s}$ تا $t_3 = 6 \text{ s}$

$$\text{از } t_3 = 6 \text{ s تا } t_4 = 9 \text{ s : } a_3 = \frac{14 - 2}{9 - 6} = 4 \text{ m/s}^2$$

۵۶- پاسخ- گزینه ۳

$$v_A = |\tan \alpha| = \left| \frac{4}{5} \right| = 0.8 \text{ m/s}$$

$$v_B = |\tan \alpha| = \left| \frac{6}{5} \right| = 1.2 \text{ m/s}$$

$$x_A = -0.8t + 6 \xrightarrow{x=0} t = 7.5 \text{ s}$$

$$x_B = 1.2t - 4 \xrightarrow{t=7.5} x_B = (1.2 \times 7.5) - 4 = 5 \text{ m}$$

$$|x_B - x_A| = 5 - 0 = 5 \text{ m}$$

۵۷- پاسخ- گزینه ۱

محاسبه زمان عبور کامل قطار از روی پل:

$$\begin{array}{c} \text{تندی قطار} \\ \uparrow v \\ \Delta x = t_1 \Rightarrow 300 + 200 = 25t_1 \Rightarrow t_1 = 20 \text{ s} \\ \downarrow \\ \text{طول پل + طول قطار} \end{array}$$

محاسبه زمان واقع شدن کامل قطار روی پل:

$$\Delta x = vt_p \Rightarrow 300 - 200 = 25t_p \Rightarrow t_p = 4 \text{ s}$$

↓
طول قطار-طول پل

$$\frac{t_1}{t_p} = \frac{20}{4} = 5$$

۵۸- پاسخ- گزینه ۴

تک تک موارد را بررسی می‌کنیم:

مورد الف) با توجه به اینکه شیب خط مماس در لحظه اول صفر نیست، سرعت متحرک برابر با صفر نیست. (نادرست)

مورد ب) با توجه به اینکه ثانیه دوم می‌شود از ثانیه ۱ تا ثانیه ۲ و شیب خط مماس برابر با صفر است سرعت متوسط نیز برابر با صفر است. (درست)

مورد پ) با توجه به اینکه از ثانیه ۲ تا ثانیه ۳ نمودار $x-t$ یک خط راست است، سرعت ثابت و حرکت یکنواخت است. (درست)

دو مورد صحیح است.

۵۹- پاسخ- گزینه ۲

با استفاده از اطلاعات داده شده در صورت سوال، معادله مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت را برای متحرک می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{a=12 \text{ m/s}^2, v_0=-18 \text{ m/s}, x_0=12 \text{ m}} x = 6t^2 - 18t + 12$$

در $x = 0$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد (بردار مکان برداری است که مبدا حرکت $(x = 0 \text{ m})$ را به مکان جسم وصل می‌کند).

$$0 = 6t^2 - 18t + 12 \xrightarrow{\div 6} 0 = t^2 - 3t + 2$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 1s, 2s$$

۶۰- پاسخ- گزینه ۱

بازه زمانی مورد نظر برای محاسبه سرعت متوسط از $t = 0s$ تا $t = 14s$ است زیرا در این بازه بردار مکان متحرک در جهت محور x (یعنی مثبت) است.

$$\bar{v}_{(0-14s)} = \frac{0 - 28}{14} = -2 m/s \Rightarrow |\bar{v}_{(0-14s)}| = 2 m/s$$

۶۱- پاسخ- گزینه ۳

می‌خواهیم شتاب متوسط یک متحرک را از لحظه $t = 2s$ تا لحظه $t = 5s$ محاسبه کنیم.

$$v = 4t^2 - 6t + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 2s : v_1 = 4 \times 4 - 6 \times 2 + 2 = 6 m/s \\ t = 5s : v_2 = 4 \times 25 - 6 \times 5 + 2 = 72 m/s \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{72 - 6}{5 - 2} = 22 m/s^2$$

۶۲- پاسخ- گزینه ۴

برای حل این مسئله ابتدا باید شتاب ثابت متحرک را محاسبه کنیم، سپس با استفاده از آن بازه زمانی مورد نظر را پیدا کنیم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \xrightarrow{v_0=0, \Delta x=216m} 216 = \frac{1}{2}a(12)^2$$

$$\Rightarrow a = 3 m/s^2$$

ما به دنبال بازه‌ای هستیم که در آن مسافت طی شده ۳۶ متر باشد با توجه به گزینه‌ها متوجه می‌شویم که اختلاف بازه زمانی ۲ ثانیه مد نظر است.

پس فرض می‌کنیم بازه زمانی مورد نظر برابر با $t - 2$ تا t باشد بنابراین داریم :

$$\left. \begin{aligned} x_t &= \frac{1}{\gamma} at^{\gamma} + o \\ x_{t-\gamma} &= \frac{1}{\gamma} a(t-\gamma)^{\gamma} + o \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \left| \frac{1}{\gamma} a(t^{\gamma} - (t-\gamma)^{\gamma}) \right| \Rightarrow \Delta x = |a(\gamma t - \gamma)| \Rightarrow 36 = 3 \times (\gamma t - \gamma)$$

$$\Rightarrow (\gamma t - \gamma) = 12 \Rightarrow t = 5s$$

$$\Rightarrow a = 3m/s^{\gamma}$$

بنابراین بازه زمانی $(t - 2)$ تا t برابر است با $(\gamma - 2)$ تا γ ، یعنی ۵ تا ۷ ثانیه

۶۳- پاسخ- گزینه ۱

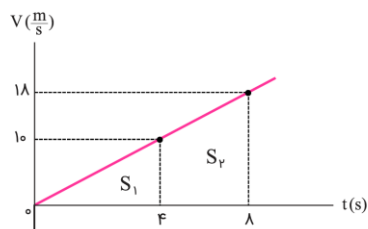
برای محاسبه سرعت متوسط دو متحرک ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم کرده سپس نسبت جابجایی آنها در ۸s اول حرکت را مقایسه می کنیم

متحرک A:

$$v = at + v_0$$

$$v_{fs} = \gamma/\delta \times \gamma + o = 10 m/s$$

$$v_{\lambda s} = \gamma \times \gamma + 10 = 18 m/s$$



$$\Delta x_A = S_1 + S_2 = \left(\frac{4 \times 10}{2} \right) + \left(\frac{10 + 18}{2} \times 4 \right)$$

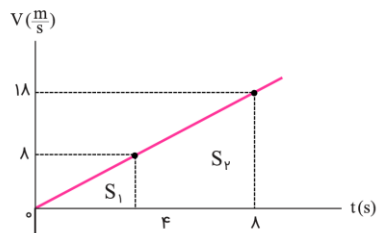
$$\Delta x_A = 20 + 56 = 76 m$$

متحرک B:

$$v = at + v_0$$

$$v_{fs} = 2 \times 4 + 0 = 8 \text{ m/s}$$

$$v_{\lambda s} = 2/5 \times 4 + 8 = 16 \text{ m/s}$$



$$\Delta x_B = S_1 + S_2 = \left(\frac{8 \times 4}{2} \right) + \left(\frac{8 + 16}{2} \times 6 \right)$$

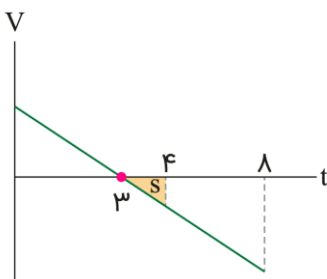
$$\Delta x_B = 16 + 64 = 80 \text{ m}$$

حال خواسته سوال را محاسبه می کنیم

$$\frac{\bar{v}_B}{\bar{v}_A} = \frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} = \frac{80}{56} = \frac{10}{7}$$

۶۴- پاسخ-گزینه ۱

روش اول: نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می کنیم. اگر مساحت مثلث رنگی شده را S در نظر بگیریم مساحت مثلث ۳ ثانیه نخست و دوزنقه بازه $(4s, 10s)$ را به دست می آوریم:



$$\frac{S_{(0,4s)}}{S} = \left(\frac{2}{10-2} \right)^2 \Rightarrow S_{(0,4s)} = 4 \text{ s}$$

$$\frac{S_{(4s,10s)}}{S} = \left(\frac{8-2}{10-2} \right)^2 \Rightarrow S_{(4s,10s)} = 16 \text{ s}$$

$$\Rightarrow S_{(4s,10s)} = 16 \text{ s} - 4 \text{ s} = 12 \text{ s}$$

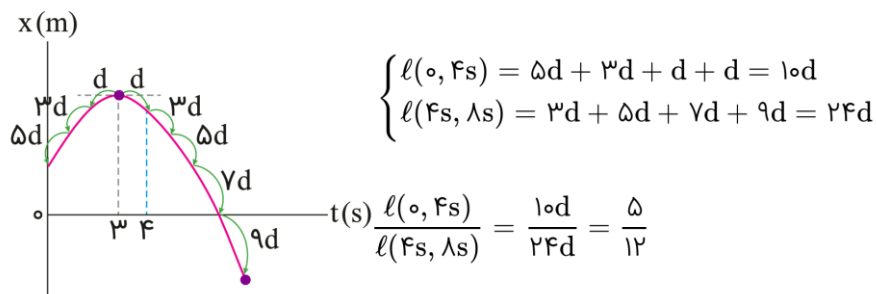
حال نسبت خواسته شده را حساب می کنیم

پاسخنامه آزمون ۱۱ مهر آموزشگاه کیمیا

آدرس: مطهری شمالی-کوچه ۱۵ زرگری-روبه رو مدرسه سادات رفیعی

$$\frac{\ell(o, fs)}{\ell(fs, \lambda s)} = \frac{S(o, \lambda s) + S(\lambda s, fs)}{S(fs, \lambda s)} = \frac{9s + 1s}{24s} = \frac{5}{12}$$

روش دوم: مسافت طی شده در ثانیه‌های متوالی از لحظه تغییر جهت به قبل به صورت $d, 3d, 5d, 7d, 9d$ و... می‌باشد. پس:



۶۵- پاسخ- گزینه ۳

طبق صورت سوال فاصله دو متحرک از هم $5m$ است و متحرک دوم $7m$ از متحرک اول جلوتر است با در نظر گرفتن مکان متحرک اول به عنوان مبدا مکانی داریم:



$$\left| \underbrace{\Delta x_1}_{\text{حرکت یکنواخت}} - \underbrace{\Delta x_2}_{\text{حرکت شتابدار}} \right| \Rightarrow \left| vt - \left(\frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \right) \right| = 5$$

$$\Rightarrow \left| 8t - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times t^2 - 7 \right) \right| = 5 \Rightarrow |8t - t^2 - 7| = 5$$

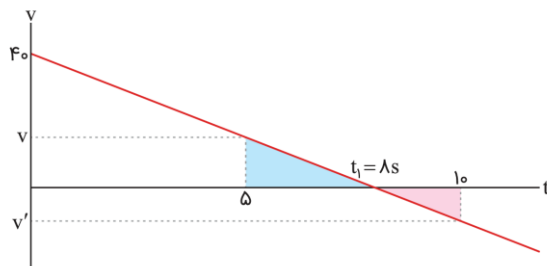
$$\Rightarrow \begin{cases} 8t - t^2 - 7 = 5 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2s \\ t = 6s \end{cases} \\ 8t - t^2 - 7 = -5 \Rightarrow t^2 - 8t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 + \sqrt{14} \\ t = 4 - \sqrt{14} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخنامه آزمون ۱۱ مهر آموزشگاه کیمیا

آدرس: مطهری شمالی-کوچه ۱۵ زرگری-روبه‌رو مدرسه سادات رفیعی

۶۶- پاسخ- گزینه ۲

ابتدا نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم و به کمک معادله شتاب t_1 و سرعت در لحظه‌های $t = 5S$ و $t = 10S$ را به دست می‌آوریم:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - 40}{t_1 - 0} \Rightarrow -5t_1 = -40 \Rightarrow t_1 = 8s$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - v}{8 - 0} \Rightarrow v = 40 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{v' - 0}{10 - 8} \Rightarrow v' = -10 \text{ m/s}$$

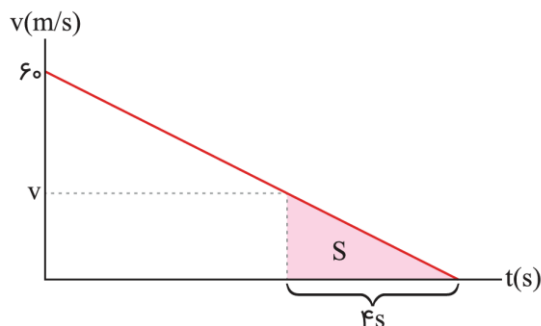
حال برای پیدا کردن تندی مساحت قسمت رنگی را به دست می‌آوریم

$$L = \text{مساحت} : \frac{40 \times 8}{2} + \frac{2 \times 10}{2} = 170$$

$$S = \frac{L}{\Delta t} = \frac{170}{10} = 17 \text{ m/s}$$

۶۷- پاسخ- گزینه ۲

از نمودار سرعت- زمان استفاده می‌کنیم



$$S = 32 \Rightarrow \frac{v \times 4}{2} = 32 \Rightarrow v = 16 \text{ m/s}$$

با تشابه مثلث رنگی و مثلث بزرگ مساحت مثلث بزرگ که مسافت هواپیما روی باند است به دست می‌آید توجه کنید که نسبت مساحت‌های دو مثلث با توان دوم نسبت اضلاع رابطه مستقیم دارد. پس داریم:

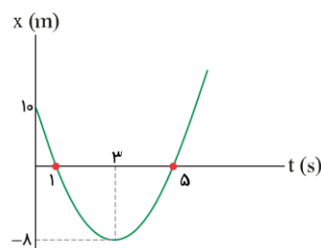
$$\frac{S}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{v}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{16}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{4}{15}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \frac{16}{225} \Rightarrow S_{\text{کل}} = 450 \text{ m}$$

۶۸- پاسخ- گزینه ۴

نمودار مکان- زمان متحرک را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار، ریشه‌های نمودار و رأس نمودار را محاسبه می‌کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow 2t^2 - 12t + 10 = 0 \Rightarrow 2(t-1)(t-5) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}, t = 5 \text{ s}$$

$$V = 4t - 12 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ s} \Rightarrow x_{3\text{s}} = 2(3)^2 - 12(3) + 10 = -8 \text{ m}$$



پاسخنامه آزمون ۱۱ مهر آموزشگاه کیمیا

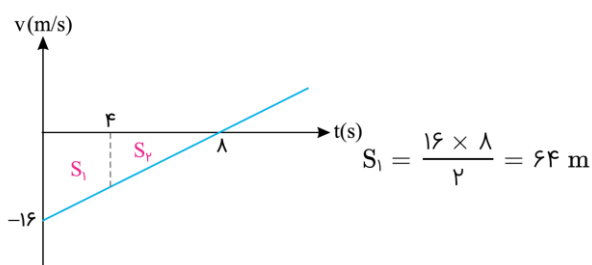
آدرس: مطهری شمالی-کوچه ۱۵ زرگری-روبه‌رو مدرسه سادات رفیعی

با توجه به نمودار در بازه‌های $(0, 1S)$ و $(3S, 5S)$ طول بردار مکان در حال کاهش است، زیرا متحرک در حال نزدیک شدن به مبدا مکان است. مجموع مسافت‌های طی شده در این دو بازه برابر است با:

$$\ell = |0 - 10| + |0 - (-8)| = 10 + 8 = 18 \text{ m}$$

۶۹- پاسخ- گزینه ۳

از روی نمودار سرعت- زمان B ، جابجایی آن را تا $t = 4S$ و $t = 8S$ به دست می‌آوریم:



تا ثانیه ۸ جابجایی آن برابر است با :

$$x_{B8} = 20 - 64 = -44 \text{ m}$$

پس مکان B در $t = 8S$ برابر است با :

$$S_2 = \frac{1}{4} S_1 = 16, \quad \Delta x = S_1 - S_2$$

و جابجایی آن تا $t = 4S$ برابر است با:

$$\Delta x_{(0-4)} = 64 - 16 = 48 \text{ m} \Rightarrow x_{B4} = 20 - 48 = -28 \text{ m}$$

سرعت دو متحرک در $t = 2S$ یکسان است شتاب B برابر است با :

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16}{8} = 2 \Rightarrow v_B = 2t - 16$$

و سرعت B در این لحظه برابر است با

$$v_{B(2s)} = 2(2) - 16 = -12 \frac{m}{s}$$

سرعت A در مدت $2s$ از $v = -24 \frac{m}{s}$ به $v = -12 \frac{m}{s}$ رسیده است و شتاب آن برابر است با :

$$a_A = \frac{-12 - (-24)}{2} = 6 \frac{m}{s^2}$$

معادله حرکت A را نوشته و مکان آن را در $t = 4s$ و $t = 8s$ به دست می‌آوریم :

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_A = \frac{1}{2}(6)(t^2) - 24t + 0$$

$$t = 4s \Rightarrow x_{A_4} = 3(4)^2 - 24(4) = 48 - 96 = -48m$$

$$t = 8s \Rightarrow x_{A_8} = 3(8)^2 - 24(8) = 192 - 192 = 0$$

حال فاصله آنها در ثانیه‌های ۴ و ۸ را به دست می‌آوریم

$$1) t = 4s, x_B - x_A = -28 - (-48) = 20m$$

$$2) t = 8s, x_B - x_A = -44 - 0 = -44$$

پس B , ۲۰ متر از A جلوتر است پس فاصله آنها $20m$ بوده و به $44m$ رسیده است پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد

۷۰- پاسخ- گزینه ۳

برای حل این مسئله ابتدا باید معادلات مکان زمان هر دو متحرک را در بازه‌های مختلف حرکتشان به دست آوریم. سپس اختلاف مکان آنها را محاسبه کرده و بازه‌های زمانی که این اختلاف کمتر یا مساوی ۱۲ متر است را پیدا کنیم.

$$0 - 6s : \begin{cases} x_A = 2t^2 \\ x_B = t^2 + 68 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 68 \leq 12 \Rightarrow t \leq 4\sqrt{5} \times \\ t^2 - 68 \geq -12 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{4} \times \end{cases}$$

$$6s - 10s : \begin{cases} x_A = 24t'^2 + 72 \\ x_B = t'^2 + 12t + 104 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} -t'^2 + 12t - 32 \leq 12 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ -t'^2 + 12t - 32 \geq -12 \Rightarrow t' = 2s \Rightarrow t = 8s \end{cases}$$

پس از بازه ۸ تا ۱۰ ثانیه (به مدت دو ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است.

$$10s - \infty : \begin{cases} x_A = 24t'' + 168 \\ x_B = 20t'' + 168 \end{cases}$$

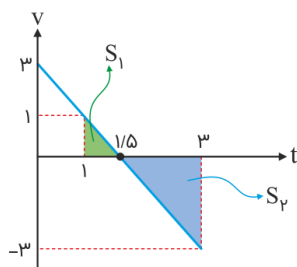
$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} 4t'' \leq 12 \Rightarrow t'' = 3s \\ 4t'' \geq -12 \Rightarrow t'' = -3s \times \Rightarrow t = 10s \end{cases}$$

پس از بازه ۱۰ تا ۱۳ ثانیه (به مدت ۳ ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است.

در نتیجه در مجموع ۵ ثانیه (از ۸ ثانیه تا ۱۳ ثانیه) فاصله دو متحرک کمتر از ۱۲ است.

۷۱- پاسخ - گزینه ۱

می دانیم اگر جا به جایی در یک بازه زمانی صفر باشد، سرعت در وسط آن بازه برابر با صفر است. (متحرک تغییر جهت می دهد)



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -2 = \frac{0 - v_0}{1/5} \Rightarrow v_0 = 3 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -2t + 3 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ s} \Rightarrow v = 1 \text{ m/s} \\ t = 3 \text{ s} \Rightarrow v = -3 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\ell = s_1 + s_2 = \frac{1 \times 0/5}{2} + \frac{1/5 \times 3}{2} = 0/25 + 2/25 = 2/5 \text{ m}$$

۷۲- پاسخ-گزینه ۱

برای حل این تست باید از زمانی که دو متحرک هم سرعت می شوند تا زمانی که هم مکان می شوند را پیدا کنیم. ابتدا معادلات سرعت هر دو متحرک را می نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} v_1(t) &= a_1 t = 0/5 t \\ v_2(t) &= a_2 t = 2(t - 3) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{v_1(t)=v_2(t)} 0/5 t = 2(t - 3)$$

$$\Rightarrow 1/5 t = 6 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

پس دو متحرک در $t = 4 \text{ s}$ هم سرعت می شوند. در این لحظه، سرعت هر دو متحرک ۲ متر بر ثانیه است. موقعیت متحرک ها در لحظه هم سرعت شدن در $t = 4$:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 (t^2) = 0/25 (4)^2 = 4 \text{ m}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 (t - 3)^2 = (4 - 3)^2 = 1 \text{ m}$$

بنابراین در لحظه هم سرعت شدن، متحرک اول ۳ متر جلوتر است.
برای تعیین زمان برخورد (هم مکان شدن دو متحرک)، معادله $x_1(t) = x_2(t)$ را حل می کنیم:

پاسخنامه آزمون ۱۱ مهر آموزشگاه کیمیا

آدرس: مطهری شمالی-کوچه ۱۵ زرگری-روبه رو مدرسه سادات رفیعی

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 0/25t^2 = 2(t-3)^2 \Rightarrow t^2 = 4(t-3)^2 \\ \Rightarrow t = 2(t-3) \Rightarrow t = 6s$$

تحلیل حرکت:

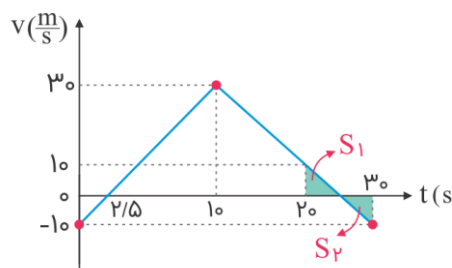
تا قبل از $t = 4s$: چون سرعت متحرک دوم کمتر از متحرک اول است، فاصله افزایش می‌یابد.
در $t = 4s$: سرعت‌ها برابر می‌شوند و فاصله به حداکثر مقدار خود می‌رسد.
بعد از $t = 4s$: سرعت متحرک دوم بیشتر می‌شود، بنابراین فاصله کاهش می‌یابد.
در $t = 6s$ دو متحرک به هم می‌رسند و فاصله صفر می‌شود.
بنابراین فاصله از $t = 4s$ تا $t = 6s$ در حال کاهش است، یعنی به مدت ۲ ثانیه.

۷۳- پاسخ-گزینه ۳

ابتدا نمودار سرعت-زمان را رسم می‌کنیم:

$$(0, 10s) : v = at + v_0 \xrightarrow{v=0} 4t_1 = 10 \Rightarrow t_1 = 2/5s \\ t = 10s : v(10) = 4 \times 10 - 10 = 30m/s \\ (10s, 30s) : v = a(t_2 - 10) + v_0 \xrightarrow{v=0} -2(t_2 - 10) = -30 \Rightarrow t_2 = 25s \\ t = 30s : v(30) = -2 \times (30 - 10) + 30 = -10m/s \\ t = 20s : v(20) = -2 \times (20 - 10) + 30 = 10m/s$$

ده ثانیه سوم یعنی بازه زمانی ۲۰ تا ۳۰ ثانیه، پس مسافت طی شده در این بازه زمانی برابر است با مجموع قدرمطلق مساحت‌های قدر مطلق سطح زیر نمودار سرعت-زمان نسبت به محور زمان در بازه مورد نظر.



$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ m} \\ S_2 &= \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = S_1 + S_2 = 50 \text{ m}$$

بنابراین، مسافتی که متحرک در ۱۰ ثانیه دوم (از $t = 20\text{s}$ تا $t = 30\text{s}$) طی می‌کند، برابر با ۵۰ متر است.

۷۴- پاسخ- گزینه ۲

چون متحرک ترمز کرده: حرکت آن کند شونده و شتاب آن منفی است:

$$\left. \begin{aligned} a &= -2 \text{ m/s}^2 \\ \Delta x &= 144 \text{ m} \\ v_f &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \Rightarrow -v_i^2 = -4 \times 144 \Rightarrow v_i = 2 \times 12 = 24 \text{ m/s}$$

از معادله سرعت- زمان، زمان کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$v_f = at + v_i \Rightarrow 0 = -2t + 24 \Rightarrow t = -\frac{24}{-2} = 12 \text{ s}$$

یافتن زمان شروع ۴ ثانیه آخر: ۴ ثانیه آخر حرکت برابر با بازه زمانی $t = 8\text{s}$ تا $t = 12\text{s}$ خواهد بود. اکنون باید در این زمان سرعت ابتدایی را پیدا کنیم و سپس جابه‌جایی در ۴ ثانیه آخر حرکت را بدست آوریم.

$$\begin{aligned} v_1 &= a(t) + v_i = -2(12 - 4) + 24 = 8 \text{ m/s} \\ \Delta x &= \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t = \frac{1}{2} \times -2 \times 16 + 8 \times 4 = 16 \text{ m} \end{aligned}$$

۷۵- پاسخ- گزینه ۲

محاسبه مستقیم:

$$\left. \begin{aligned} a &= -3 \text{ m/s}^2 \\ \Delta x &= 200 \text{ m} \\ v_f &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = -2a\Delta x \Rightarrow v_i^2 = 6 \times 200 = 1200 \Rightarrow v_i = 20\sqrt{3} \text{ m/s}$$

از معادله سرعت- زمان، زمان کل حرکت را محاسبه می کنیم:

$$v_f = at + v_i \Rightarrow t = -\frac{v_i}{a} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

یافتن زمان شروع ۳ ثانیه آخر: ۳ ثانیه آخر حرکت برابر با t_3 خواهد بود. اکنون باید در این زمان سرعت ابتدایی را پیدا کنیم و سپس جابه‌جایی در ۳ ثانیه آخر حرکت را بدست آوریم.

$$v_1 = a(t - 3) + v_i = -3\left(\frac{20\sqrt{3}}{3} - 3\right) + 20\sqrt{3} = 9 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t = \frac{1}{2} \times -3 \times 9 + 9 \times 3 = 13.5 \text{ m}$$

شیمی

۷۶- پاسخ- گزینه ۱

گزینه ۱: درست- این گزینه یک مسئله رقیق سازی است.

محاسبه غلظت اولیه $pH = ۱$: به معنی آن است که غلظت یون هیدرونیوم $[H^+]$ برابر $۰/۱$ مولار است

$$[H^+] = ۰/۱ M$$

محاسبه مول اولیه: تعداد مول HCl در محلول اولیه با استفاده از رابطه $n = M \times V$ محاسبه می شود.

$$n = ۰/۱ \text{ mol.L}^{-1} \times ۰/۱ \text{ L} = ۰/۰۱ \text{ mol}$$

با افزودن ۱۰۰ میلی لیتر آب، حجم نهایی محلول ۲۰۰ میلی لیتر ($۰/۲$ لیتر) می شود. غلظت جدید از تقسیم مول بر حجم جدید به دست می آید.

$$[H^+] = ۰/۰۱ \text{ mol} / ۰/۲ \text{ L} = ۰/۰۵ \text{ M}$$

$$\begin{aligned} pH &= -\log[H^+] = -\log(۰/۰۵) = -\log(۵ \times ۱۰^{-۲}) = -(\log ۵ + \log ۱۰^{-۲}) \\ &= -(۰/۷ - ۲) = ۱/۳ \end{aligned}$$

گزینه ۲: نادرست- تیتراسیون یک واکنش خنثی شدن کامل است. حجم باز مصرفی به تعداد مول های اولیه اسید بستگی دارد نه به قدرت اسیدی آن. چون غلظت اولیه (M) و حجم اولیه (V) هر دو اسید یکسان است تعداد مول های اولیه آن ها ($n = M \times V$) نیز برابر است. بنابراین برای خنثی کردن هر دو به حجم یکسانی از محلول $NaOH$ با غلظت مشخص نیاز است.

گزینه ۳ نادرست- برای مقایسه pH دو اسید ضعیف باید غلظت یون $[H^+]$ را در هر کدام محاسبه کنیم.

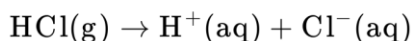
$$[H^+] = \sqrt{(K_a \times M)} = \sqrt{(1/8 \times 10^{-5} \times 0/1)} \\ = \sqrt{(1/8 \times 10^{-6})} \approx 1/34 \times 10^{-3} M$$

$$[H^+] = \sqrt{(K_a \times M)} = \sqrt{(6/3 \times 10^{-4} \times 0/1)} \\ = \sqrt{(6/3 \times 10^{-5})} \approx 7/94 \times 10^{-3} M$$

چون غلظت $[H^+]$ در محلول HF بیشتر است، pH آن کمتر (اسیدی تر) خواهد بود.

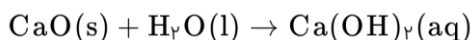
گزینه ۴: نادرست- باید تعداد کل مول‌های یون‌ها را در هر محلول محاسبه کنیم.

فرض کنیم $2n$ مول HCl در آب حل شده است. واکنش یونش آن به صورت زیر است:

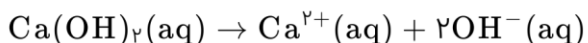


$$تعداد\ کل\ مول\ یون\ ها = 2n(H^+ \text{ برای}) + 2n(Cl^- \text{ برای}) = 4n$$

طبق فرض n مول کلسیم اکسید (CaO) در آب حل شده است واکنش آن با آب به صورت زیر است:



سپس کلسیم هیدروکسید به طور کامل یونیزه می‌شود:



$$تعداد\ کل\ مول\ یون\ ها = n(Ca^{2+} \text{ برای}) + 2n(OH^- \text{ برای}) = 3n$$

۷۷- پاسخ- گزینه ۳

الکترولیت بودن ارتباطی با محلول و یا نامحلول بودن ترکیب مورد نظر در آب ندارد برای مثال نقره کلرید ($AgCl$)، ترکیبی نامحلول در آب است اما الکترولیتی قوی به شمار می‌آید. چون همان مقدار کمی که از آن در آب حل شده است به طور کامل یونیده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: رسانایی الکتریکی یک محلول به مجموع غلظت مولی یون‌های آن وابسته است. بنابراین عامل غلظت، یکی از کمیت‌های مهمی است که در این قضیه باید در نظر گرفته شود. برای مثال: محلولی بسیار غلیظ از یک اسید ضعیف می‌تواند رسانایی الکتریکی بیشتری نسبت به محلول بسیار رقیق از یک اسید قوی داشته باشد.

گزینه ۲: با افزایش طول زنجیره هیدروکربنی در کربوکسیلیک اسیدها قدرت اسیدی آنها کاهش می‌یابد؛ در نتیجه در شرایط یکسان غلظت و دما، هرچه زنجیره هیدروکربنی یک کربوکسیلیک اسید طولانی‌تر باشد، K_a و رسانایی الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

گزینه ۴: دقت کنید که مشابه این مورد در کنکور سراسری نیز مطرح شده است. در این دو محلول مجموع غلظت یون‌ها با یکدیگر برابر است اما به سبب تفاوت نوع یون‌ها رسانایی الکتریکی آنها به یکدیگر نزدیک خواهد بود اما کاملاً برابر نخواهد بود.

۷۸- پاسخ- گزینه ۱

سدیم هیدروکسید بازی قوی و آمونیاک باز ضعیف است. از محلول آمونیاک به عنوان شیشه پاک کن و از محلول سدیم هیدروکسید به عنوان لوله بازکن استفاده می‌گردد. محلول سدیم هیدروکسید مانند رسانایی الکتریکی آن از محلول آمونیاک بیشتر است.

۷۹- پاسخ- گزینه ۳

سس مایونز یک کلوئید است.

کلوئیدها (مانند سس مایونز) پایدار و سوسپانسیون (مانند شربت معده) ناپایدارند.

کلوئیدها مخلوط‌هایی ناهمگن هستند. سس مایونز ناهمگن و محلول مس(II) سولفات همگن است.

۸۰- پاسخ- گزینه ۴

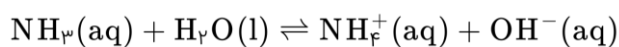
بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست- رسانایی الکتریکی یک محلول به غلظت یون‌های موجود در آن بستگی دارد. غلظت یون‌ها نیز هم به ثابت یونش (K_b) و هم به غلظت اولیه باز (M) وابسته است. ممکن است یک محلول غلیظ از باز ضعیف‌تر (XOH)، یون‌های بیشتری نسبت به یک محلول بسیار رقیق از باز قوی‌تر (DOH) داشته باشد و رسانایی آن بیشتر باشد. بنابراین این امر به یقین درست نیست.

گزینه ۲: نادرست- سدیم هیدروکسید یک باز قوی و آمونیاک یک باز ضعیف است با تنظیم غلظت این دو محلول می‌توان غلظت یون هیدروکسید ($[OH^-]$) و در نتیجه pH آنها را برابر کرد. برای مثال یک محلول رقیق از سدیم هیدروکسید می‌تواند pH برابر با یک محلول غلیظ‌تر از آمونیاک داشته باشد.

گزینه ۳: نادرست- سود سوزآور ($NaOH$) و پتاس سوزآور (KOH) بازهای قوی هستند، اما pH محلول آنها به غلظتشان بستگی دارد. pH یک محلول تنها در صورتی برابر ۱۴ است که غلظت یون هیدروکسید در آن ۱M باشد لول‌های رقیق‌تر از این بازها، pH کمتر از ۱۴ دارند.

گزینه ۴ درست شیشه پاک کن، محلول آمونیاک در آب است. آمونیاک (NH_3) یک باز ضعیف است و به طور جزئی در آب یونیده می‌شود.



از آنجا که این واکنش تعادلی است، در محلول همواره مقداری از مول‌های یونیده نشده آمونیاک در کنار یون‌های آمونیوم و هیدروکسید وجود دارد.

۸۱- پاسخ- گزینه ۴

گزینه ۱: درست- چربی‌های طبیعی مخلوطی از استرهای گوناگون هستند. بخش اصلی مولکول‌های چربی را زنجیره‌های بلند هیدروکربنی و ناقطبی تشکیل می‌دهند، بنابراین نیروی بین مولکولی غالب در میان آنها از نوع واندروالسی است.

گزینه ۲: درست- محلول لوله بازکن حاوی باز قوی (مانند سدیم هیدروکسید) و محلول شیشه پاک کن حاوی باز ضعیف (مانند آمونیاک) است در شرایط یکسان، pH باز قوی از باز ضعیف بیشتر است، بنابراین pH شیشه پاک کن کوچکتر است.

گزینه ۳: درست- همانطور که در کتاب درسی اشاره شده یکی از دلایل حرکت به سمت تولید پاک کننده‌های غیر صابونی چالش کمبود منابع چربی برای تولید انبوه صابون بوده است.

گزینه ۴: نادرست- در این گزاره از عبارت «با حل شدن در آب» استفاده شده است. منیزیم هیدروکسید $(Mg(OH)_2)$ که ماده اصلی شیر منیزی است یک ترکیب یونی کم محلول در آب به شمار می‌رود. این ماده در آب به طور کامل حل نمی‌شود، بلکه مخلوطی ناهمگن به نام سوسپانسیون تشکیل می‌دهد که ظاهر شیری رنگ آن نیز به همین دلیل است.

۸۲- پاسخ- گزینه ۳

محلول هیدروکلریک اسید pH پایین‌تری دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: در حجم‌های برابری از محلول‌ها که در شکل نشان داده شده است، ۵ مولکول اسید حل شده و مولاریته محلول‌ها برابر است.

گزینه ۲: غلظت آنیون‌ها و کاتیون‌ها (یون‌های هیدرونیوم) در محلول HCl بیشتر است. با این توصیف شیمیدان‌ها به کمک مدل آرنیوس، هیدروکلریک اسید را یک اسید قوی و هیدروفلوئوریک اسید را یک اسید ضعیف می‌نامند.

گزینه ۴: در محلول هیدروفلوئوریک اسید فرایند یونش برگشت پذیر است و اندک یون‌های حاصل از یونش با مولکول‌های یونیده نشده در کنار هم در محلول وجود دارند و در تعادل هستند.

۸۳- پاسخ- گزینه ۴

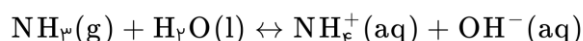
عبارت‌های «ب و پ» درست اند

بررسی همه موارد:

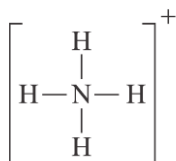
الف) بر اساس مدل آرنیوس، قدرت اسیدی اسیدها مشخص نمی‌شود برای مثال در مدل آرنیوس HF و HNO_3 هر دو اسید هستند. چون هنگام انحلال در آب، $[H^+]$ را افزایش می‌دهند ولی طبق مدل آرنیوس قدرت اسیدی این دو ماده بررسی نمی‌شود.

ب) سدیم اکسید یک اکسید فلزی بوده و همانند صابون خاصیت بازی دارد کاغذ pH آغشته به محلول این مواد به رنگ آبی در می‌آید.

پ) آمونیاک مطابق واکنش زیر در آب حل می‌شود:



ساختار لوویس یون آمونیوم به صورت زیر است:



ت) جوهر نمک، محلول HCl در آب است. در محلول‌هایی که خاصیت اسیدی دارند، مقدار pH کمتر از ۷ بوده و $[H^+] > [OH^-]$ است.

۸۴- پاسخ- گزینه ۴

ثابت یونش بیانی از میزان پیشرفت (نه جهت) فرایند یونش تا رسیدن به تعادل است به طوری که هرچه ثابت یونش اسیدی در دمای معین بزرگتر باشد، آن اسید بیشتر یونیده شده و غلظت یون‌های موجود در محلول آن بیشتر است.

۸۵- پاسخ- گزینه ۲

نمک‌های فسفات بایون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} جود در آب سخت واکنش می‌دهند و از تشکیل رسوب جلوگیری می‌کنند. اما این نمک‌ها نقشی در کاهش خاصیت بازی صابون ندارند.

۸۶- پاسخ- گزینه ۳

$$HA \text{ در اسید } M \times \alpha = [H^+] \Rightarrow M \times \frac{2}{100} = 10^{-3} \Rightarrow M = 0.05 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$M_1 V_1 = M_2 V_2 \Rightarrow 0.05 \times 10 = 0.25 \times V_2 \Rightarrow V_2 = 20 \text{ mL}$$

۸۷- پاسخ- گزینه ۱

بررسی سایر عبارت‌ها:

پ) نادرست- میزان چسبندگی لکه‌ها روی پارچه‌های پلی استر بیشتر از پارچه‌های نخی است، لذا جنس پارچه نیز در میزان لکه‌برداری آن اهمیت دارد.

ت) نادرست- با افزایش جمعیت جهان، مصرف صابون افزایش یافت. بدیهی است که برای تولید صابون در مقیاس انبوه به مقدار بسیار زیادی چربی نیاز است که این خود چالش بزرگی به حساب می‌آید.

۸۸- پاسخ- گزینه ۴

$$pH = 2 \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-2} = M.n.\alpha \Rightarrow M = 0.01$$

تعداد OH^- باز $= n_1$

تعداد H^+ اسید $= n_2$

$$\underbrace{M_1 n_1 V_1}_{Mg(OH)_2} = \underbrace{M_2 n_2 V_2}_{HCl} \Rightarrow 0.05 \times 2 \times 5 = 0.01 \times 1 \times V_2 \Rightarrow V_2 = 500 \text{ mL}$$

۸۸- پاسخ- گزینه ۳

CH_3COOH ، استیک اسید، ترکیبی مولکولی و الکترولیت است.
 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ، اتانول، ترکیبی مولکولی و غیرالکترولیت است.
 BaO ، باریم اکسید، ترکیبی یونی و الکترولیت است.
 SO_3 ، گوگرد تری اکسید، ترکیبی مولکولی و الکترولیت است.

۹۰- پاسخ- گزینه ۴

یاخته‌های دیواره معده با ورود مواد غذایی به آن هیدروکلریک اسید ترشح می‌کنند. این اسید افزون بر فعال کردن آنزیم‌ها برای تجزیه مواد غذایی، جانداران ذره بینی موجود در غذا را از بین می‌برد.

۹۱- پاسخ- گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها:

واکنش گزینه ۱: نادرست- با توجه به کتاب درسی



واکنش گزینه ۲: درست- با توجه به کتاب درسی

واکنش گزینه ۳: درست- با توجه به کتاب درسی. (در کتاب درسی سود سوزآور NaOH و پتاس سوزآور KOH به عنوان بازهای بسیار قوی و مواد خورنده معرفی شده‌اند)

واکنش گزینه ۴: درست- با توجه به کتاب درسی:

۹۲- پاسخ- گزینه ۴

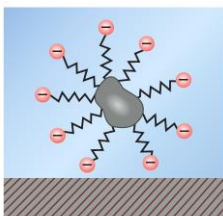
شکل داده شده مدل فضاپرکن پاک کننده غیر صابونی را نشان می‌دهد. این مواد قدرت پاک کنندگی بیشتری نسبت به صابون دارند و در آب‌های سخت نیز خاصیت پاک کنندگی خود را حفظ می‌کنند، زیرا با یون‌های موجود در این آب‌ها رسوب نمی‌دهند.

۹۳- پاسخ- گزینه ۲

موارد ب و ت درست اند

الف) درصد لکه باقی مانده بر روی پارچه نخی کمتر از پارچه پلی استری است. زیرا چربی با پارچه پلی استری که بخش بزرگتری از آن دارای ساختار ناقطبی است جاذبه قوی تری از نوع واندروالسی برقرار می کند و جدا کردن لکه چربی از روی پارچه پلی استری دشوارتر است.

ب) مطابق شکل زیر در مخلوط آب و چربی و صابون، سطح بیرونی لکه های چربی، بار الکتریکی منفی دارند.



پ) در واکنش مخلوط آلومینیوم و سدیم هیدروکسید با آب، دمای محیط افزایش می یابد، چون واکنش انجام شده گرماده است.

ت) اسید چرب همان کربوکسیلیک اسید بوده ولی زنجیره هیدروکربنی (R) در آن طولانی تر است. در کربوکسیلیک اسیدها گروه عاملی کربوکسیل ($-COOH$) وجود دارد.

۹۴- پاسخ- گزینه ۳

$$\begin{aligned} \text{pH} &= 0.7 \\ [\text{H}_3\text{O}^+] &= 10^{-\text{pH}} = 10^{-0.7} = 10^{-1} \times 10^{0.3} = 10^{-1} \times 10^{\log 2} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1} \\ 0.2 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 0.1 \text{ L} &= 0.02 \text{ mol H}_3\text{O}^+ \\ \text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص} &= \text{جرم خالص} \\ 0.5 \text{ g} \times \frac{40}{100} &= 0.2 \text{ g NaOH خالص} \\ n = \frac{m}{M} = \frac{0.2}{40} &= 0.01 \text{ mol OH}^- \end{aligned}$$

هر ۱ مول H_3O^+ با ۱ مول OH^- خنثی می‌شود، پس:

$$\begin{aligned} 0.02 \text{ mol H}_3\text{O}^+ - 0.01 \text{ mol OH}^- &= 0.01 \text{ mol H}^+ \text{ باقی می‌ماند} \\ [\text{H}_3\text{O}^+] &= \frac{\text{mol H}_3\text{O}^+}{V \text{ محلول}} = \frac{0.01 \text{ mol}}{0.1 \text{ L}} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \\ \text{pH} &= -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log 10^{-1} = 1 \end{aligned}$$

۹۵- پاسخ- گزینه ۳

$$\begin{aligned} 2\text{RCOONa(aq)} + \text{CaCl}_2(\text{aq}) &\rightarrow (\text{RCOO})_2\text{Ca(s)} + 2\text{NaCl(aq)} \\ M_{\text{RCOONa}} &= M_{\text{R}} + M_{\text{C}} + 2M_{\text{O}} + M_{\text{Na}} = 253 + 12 + 32 + 23 = 320 \text{ g.mol}^{-1} \\ n_{(\text{RCOO})_2\text{Ca}} \text{ نظری} &= 10 \text{ g RCOONa} \times \frac{1 \text{ mol RCOONa}}{320 \text{ g RCOONa}} \times \frac{1 \text{ mol } (\text{RCOO})_2\text{Ca}}{2 \text{ mol RCOONa}} = 0.015625 \text{ mol} \\ \text{بازده درصدی} &= \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{0.015}{0.015625} \times 100 = 96\% \end{aligned}$$

مقدار نمک خوراکی (NaCl) تولید شده بر اساس مقدار عملی رسوب محاسبه می‌شود:

$$n_{\text{NaCl}} = 0.015 \text{ mol } (\text{RCOO})_2\text{Ca} \times \frac{2 \text{ mol NaCl}}{1 \text{ mol } (\text{RCOO})_2\text{Ca}} = 0.03 \text{ mol}$$

هر مول NaCl به دو مول یون (Cl^- و Na^+) تفکیک می‌شود:

$$\text{کل مول یون‌ها} = n_{\text{NaCl}} \times 2 = 0.03 \times 2 = 0.06 \text{ mol}$$

۹۶- پاسخ- گزینه ۲

این مسئله را به دو روش می توان حل کرد:

روش اول:

$$\text{حجم اولیه: } V_1 = 200 \text{ mL}$$

$$\text{حجم نهایی: } V_2 = 200 + 800 = 1000 \text{ mL}$$

$$M_1 V_1 = M_2 V_2 \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1000}{200} = 5$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\sqrt{\frac{K_a}{M_2}}}{\sqrt{\frac{K_a}{M_1}}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{5}$$

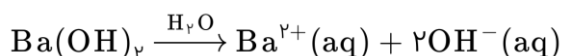
روش دوم: با توجه به اینکه در دمای ثابت انجام گرفته پس:

$$K_{a_1} = K_{a_2} \Rightarrow M_1 \alpha_1^2 = M_2 \alpha_2^2$$

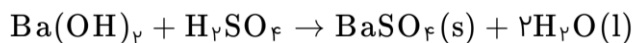
$$\frac{n}{0.2} \times \alpha_1^2 = \frac{n}{1} \times \alpha_2^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{5}$$

۹۷- پاسخ- گزینه ۳

محلول باریم هیدروکسید، محلول یک باز قوی است.



و رسانایی الکتریکی بالایی دارد و در آغاز فرایند، لامپ پرنور می باشد، در ادامه عمل خنثی شدن اسید و باز انجام می شود.



نکته قابل توجه این است که نمک حاصل یعنی باریم سولفات BaSO_4 یک نمک نامحلول است و رسوب می کند و با مصرف شدن یون ها، رسانایی محلول کاهش یافته تا حد صفر می رسد. در ادامه با افزودن بیشتر اسید قوی دو پروتون H_2SO_4 و یونش آن مجدداً رسانایی الکتریکی محلول افزایش می یابد.

۹۸- پاسخ- گزینه ۴

$$\begin{aligned} \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} \Rightarrow [\text{H}^+] &= 10^{-11/4} = 10^{-12} \times 10^{0/4} = 10^{-12} \times (10^{0/3})^2 \quad (\log 2 = 0/3) \quad 4 \times 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1} \\ [\text{H}^+][\text{OH}^-] &= 10^{-14} \Rightarrow \frac{[\text{H}^+]}{[\text{OH}^-]} = \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} = \frac{[\text{H}^+]^2}{10^{-14}} = \frac{(4 \times 10^{-12})^2}{10^{-14}} = 16 \times 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1} \end{aligned}$$

۹۹- پاسخ- گزینه ۲

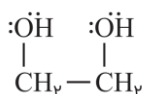
آمونیاک بازی ضعیف است، پس با ورود به آب به طور کامل یونش پیدا نمی کند و به طور جزئی به یون های NH_4^+ و OH^- تبدیل می شود.

۱۰۰- پاسخ- گزینه ۲

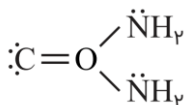
مخلوط آب و روغن و صابون یک کلئوئید پایدار و ناهمگن است و حاوی توده های مولکولی با اندازه های متفاوت است و با رفتار نور در محلول رفتاری متفاوت دارند.

۱۰۱- پاسخ- گزینه ۲

ساختار اتیلن گلیکول دو گروه عاملی هیدروکسیل (الکل) دارد:



ساختار اوره دو گروه آمیدی دارد:



عبارت های درست: الف، ت و ث

عبارت های نادرست: ب و پ

ب) فقط اتم‌های هیدروژن متصل به O ، F و N می‌توانند پیوند هیدروژنی تشکیل دهند.

پ) بین مولکول‌های استون پیوند هیدروژنی تشکیل نمی‌شود.

۱۰۲- پاسخ- گزینه ۲

سدیم هیدروکسید ($NaOH$) یک باز قوی بوده ولی یک ترکیب یونی است. واژه یونش برای ترکیب‌های مولکولی به کار می‌رود. برای ترکیب‌های یونی، واژه تفکیک به کار می‌رود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اتانول و اتیلن گلیکول، کل هستند و در آب به صورت مولکولی حل می‌شوند؛ لذا هیچ کدام از آنها اسید یا باز نیستند و نمی‌توانند رنگ کاغذ pH را تغییر دهند.

۳) اسید ماده‌ای است که با انحلال در آب، $[H^+]$ را افزایش دهد. SO_2 و SO_3 به ترتیب قطبی و ناقطبی هستند و محلول در هر دو در آب، خاصیت اسیدی دارد.

سر مثبت مولکول‌های آب، H است و مولکول‌های آب از سمت اتم‌های هیدروژن خود به سمت یون برمید (Br^-) نزدیک می‌شوند.

۱۰۳- پاسخ- گزینه ۲

سس مایونز، شیر، ژله و رنگ‌های پوششی، کلئید هستند و از توده‌های مولکولی با اندازه‌های مختلف ساخته می‌شوند. کلئیدها، مخلوط‌هایی ناهمگن (به ظاهر همگن) به حساب می‌آیند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) بیماری وبا در طول تاریخ چندین بار گسترش یافته و یک بیماری واگیردار به حساب می‌آید. این بیماری به دلیل آلوده شدن آب و نبود بهداشت شایع شده است.

۳) HCl ترشح شده از یاخته‌های معده، باعث فعال کردن آنزیم‌های گوارشی می‌شود و جانداران ذره بینی موجود در غذا را از بین می‌برد دقت کنید که خود HCl آنزیم گوارشی نیست.

۴) شاخص امید به زندگی، شاخصی که نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به طور میانگین (نه در مجموع!) چند سال در این جهان زندگی می‌کنند.

۱۰۴- پاسخ- گزینه ۱

محاسبه مول اولیه گاز HA در شرایط STP :

$$n_{\text{اولیه}} = \frac{V_{STP}}{22.4 \text{ L.mol}^{-1}} = \frac{1/12 \text{ L}}{22.4 \text{ L.mol}^{-1}} = 0.05 \text{ mol}$$

$$pH = 1/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-1/7} = 10^{0/3} \times 10^{-2} \approx 2 \times 10^{-2} \text{ M}$$

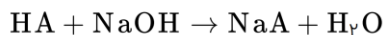
با توجه به اینکه درجه یونش (α) برابر یک است، غلظت اسید برابر غلظت یون هیدروژن است:

$$[HA] = [H^+] = 2 \times 10^{-2} \text{ M}$$

$$n_{\text{حل شده}} = M \times V = (2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}) \times 2 \text{ L} = 0.04 \text{ mol}$$

$$\text{درصد انحلال} = \frac{n_{\text{حل شده}}}{n_{\text{اولیه}}} \times 100 = \frac{0.04}{0.05} \times 100 = 80\%$$

در ادامه جرم $NaOH$ برای خنثی‌سازی را به دست می‌آوریم:



$$n_{HA} = M \times V = (2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}) \times 0.2 \text{ L} = 0.004 \text{ mol}$$

$$n_{NaOH} = n_{HA} = 0.004 \text{ mol}$$

$$m_{NaOH} = n_{NaOH} \times M_{NaOH} = 0.004 \text{ mol} \times 40 \text{ g.mol}^{-1} = 0.16 \text{ g}$$

۱۰۵- پاسخ- گزینه ۳

فرمول محاسبه غلظت یون هیدرونیوم:

$$[H_3O^+] = M \cdot \alpha$$

$$\% \alpha = \alpha \times 100 \Rightarrow \alpha = \frac{\% \alpha}{100} \Rightarrow \alpha = \frac{0.014}{100} = 14 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow [H_3O^+] = 2 \times 10^{-2} \times 14 \times 10^{-5} = 28 \times 10^{-7} = 2/8 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

هیدروسیانیک اسید (HCN)، یک اسید ضعیف است و غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن به درجه یونش اسید بستگی دارد.