



کیمیا را دنبال کنید

آموزشگاه کیمیا

دخت رانه | پس رانه



آزمون های جامع کیمیا

آزمون ۴ گزینه ای

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

پاسخنامه آزمون

۱۲ تیر ماه

دوازدهم ریاضی

ریاضیات

سوال ۱ گزینه ۱



از فرض سؤال داریم:

$$x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} = 10, x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t + t^2 - 2 = 10 \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow t = -4 \text{ یا } 3$$

بنابراین:

$$x + \frac{1}{x} = -4 \text{ یا } 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \text{ یا } x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3} \text{ یا } \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

از طرفی اگر $x + \frac{1}{x} = -4$ باشد آنگاه $d = 9$ است. در این حالت بیشترین مقدار dx برابر با $9(-2 + \sqrt{3})$ است.

اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد آنگاه $d = 2$ برابر با است و بیشترین مقدار dx برابر با $2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 3 + \sqrt{5}$ است.

سوال ۲ گزینه ۳



$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \\ \Rightarrow P = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1 = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$$

سوال ۳ گزینه ۳



$$A = \{x + 1 | x \in \mathbb{N}, -1 < x < 5\} = \{3, 5, 7, 9\}, B = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 5\} = (-1, 5)$$

$$C = \{x | x \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

گزینه های ۱ و ۲ نادرست اند زیرا $A \cap B = \{3\}$

$$(B \cup C) \cap A = ((-1, 5) \cup \{2, 4, 6, \dots\}) \cap \{3, 5, 7, 9\} = \{3\}$$

گزینه ۴ نادرست است زیرا $\{3\}$

سوال ۴ گزینه ۳



با توجه به هم ارزی های $\sim p \Rightarrow p \equiv p$ و $p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p$ نتیجه میگیریم که:

$$(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow p \equiv p$$

$$((p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p) \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p$$

$$(((p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p) \Rightarrow \sim p) \vee \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$$

هدف نقیض این گزاره است و بر اساس قانون دموگن خواهیم داشت:

$$\sim(\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$$

سوال ۵ گزینه ۴



$$\begin{cases} f(x) = a(x - 0)(x - 2) + 1 = ax^2 - 2ax + 1 \\ g(x) = a(x - 1)(x - 5) + b = ax^2 - 6ax + 5a + b \end{cases} \Rightarrow f(x) - g(x) = 4ax + 1 - 5a - b$$

$$\Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 - \frac{15}{2} - b = -1 \Rightarrow b = \frac{-11}{2} = -5.5$$

سوال ۶ گزینه ۳



از تلاقی $y = kx$ با $y = x^2 - 2$ داریم:

$$x^2 - kx - 2 = 0$$

$$P = mn = -2 \Rightarrow m^2 n = -2m^2 \Rightarrow -m^2 n = 2m^2 \Rightarrow 2n^2 + 2m^2 = 16$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 = s^2 - 2P = k^2 + 4 = 8 \Rightarrow k = \pm 2$$

پس مقدار بزرگتر k برابر ۲ است.

سوال ۷ گزینه ۲



اگر عرض از مبدأ دو تابع که محل تلاقی آنها نیز می باشد را k برابر با در نظر بگیریم،

داریم:

$$\begin{cases} \text{شیب خط } f = \frac{k}{3} \\ \text{شیب خط } g = \frac{-k}{12} \end{cases}$$

از آنجا که دو خط بر هم عمودند شیبهای آنها عکس و قرینه یکدیگرند پس:

$$\frac{k}{3} = -\frac{1}{\frac{-k}{12}} \Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow k = \pm 6$$

با توجه به نمودار عرض از مبدأ این خطوط مثبت است و $k = 6$ قابل قبول می باشد؛ پس

$$\begin{cases} f(x) = \frac{k}{3}x + k \xrightarrow{k=6} f(x) = 2x + 6 \\ g(x) = \frac{-k}{12}x + k \xrightarrow{k=6} g(x) = \frac{-1}{4}x + 6 \end{cases}$$

میدانیم برای تعیین دامنه تابع $y = \sqrt{(f+g)(x)}$ باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$(f+g)(x) \geq 0 \Rightarrow (2x+6) + \left(-\frac{1}{4}x+6\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x + 12 \geq 0 \Rightarrow x \geq -8$$

$$\Rightarrow a = -8 \Rightarrow \left[\frac{2a}{3}\right] = \left[\frac{-16}{3}\right] = [-5/\dots] = -6$$

سوال ۸ گزینه ۳



در مثلث ABC میتوان BC را قاعده و AH را ارتفاع گرفت. پس:

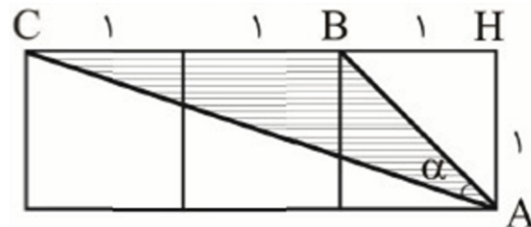
$$S_{ABC} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

از طرفی مساحت ABC با اضلاع AB و AC و زاویه بین آنها هم قابل محاسبه است. (اندازه AB و AC با فیثاغوس قابل محاسبه است).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \alpha$$

$$1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \sin \alpha$$

$$1 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



سوال ۹ گزینه ۳



$$f(x) \xrightarrow{\text{واحد چپ } 3} f(x+3) \xrightarrow{\text{قرینه}} f(-x+3) \Rightarrow g(x) = f(-x+3) \xrightarrow{x=5} g(5) = f(-2) \\ \Rightarrow g^{-1} \text{ of } (-2) = g^{-1} \text{ of } (5) = 5$$

سوال ۱۰ گزینه ۲



از شرط $f^{-1}(b) = b$ داریم:

$$f(b) = 3b - 5 = b \Rightarrow 2b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

پس داریم:

$$f \circ f \left(\frac{1}{b} \right) = f \left(f \left(\frac{2}{5} \right) \right) = f \left(\frac{6}{5} - 5 \right) = f \left(\frac{-19}{5} \right) = 3 \left(\frac{-19}{5} \right) - 5 = \frac{-57}{5} - 5 = -16 \frac{2}{5}$$

سوال ۱۱ گزینه ۱



برای یافتن تابع g در تابع $f^{-1}(x)$ به جای x ، $x+4$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1}(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ } 4]{\text{واحد } 4} f^{-1}(x+4) \Rightarrow g(x) = f^{-1}(x+4)$$

تلاقی تابع $f^{-1}(x+4)$ و $x-3$ را می‌یابیم.

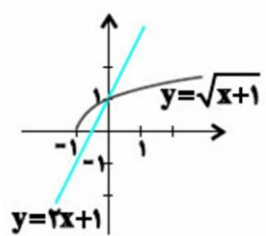
$$f^{-1}(x+4) = x-3 \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{از دو طرف}} f(f^{-1}(x+4)) = f(x-3) \Rightarrow x+4 = f(x-3)$$

با در نظر گرفتن $f(x) = -x + \sqrt{x+4}$ داریم:

$$\begin{aligned} x+4 &= -(x-3) + \sqrt{x-3+4} \Rightarrow 2x+1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow (2x+1)^2 = (\sqrt{x+1})^2 \\ \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 &= x+1 \Rightarrow 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

غ ق ق

$x = -\frac{3}{4}$ غیر قابل قبول است پس فقط یک نقطه برخورد دارند می‌توانستیم به جای حل معادله با رسم نمودار تعداد نقاط برخورد را مشخص کنیم.



سوال ۱۲ گزینه ۴



میدانیم $0 \leq 1 \pm \cos \alpha \leq 2$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} \times \frac{1+\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} \times \frac{1-\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+\cos \alpha)^2}{1-\cos^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\cos \alpha)^2}{1-\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{|1+\cos \alpha|}{|\sin \alpha|} - \frac{|1-\cos \alpha|}{|\sin \alpha|} = \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1+\cos \alpha - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cot \alpha \end{aligned}$$

سوال ۱۳ گزینه ۳



$$\begin{aligned}
 \cotg(A - B) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A - B = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A = B + \frac{\pi}{3} \\
 \frac{\sin A \cdot \cos B}{1 - \cos(A + B)} &= \frac{\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos B}{1 - \cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\cos B \left(\sin B \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos B \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right)}{1 - \left(\cos B \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin B \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right)} \\
 &= \frac{\cos B \left(\frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} \cos B - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B\right)} = \frac{\cos B (\sin B + \sqrt{3} \cos B)}{1 - \cos B + \sqrt{3} \sin B} \\
 &= \frac{\cos B (\sin B + \sqrt{3} \cos B)}{\sin B + \sqrt{3} \cos B} = \cotg B
 \end{aligned}$$

سوال ۱۴ گزینه ۱



$$\sin(x + y) = \sin(x + y) = \sin(90^\circ + y) = \cos y$$

$$\cos(x + y) = \cos(x + y) = \cos(180^\circ + y) = -\cos y$$

$$A = \cos y - \cos y = 0$$

سوال ۱۵ گزینه ۴



$$1 - 2 \sin^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin x (1 - 2 \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\theta = 2\pi \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

جمع جواب ها برابر 2π است.

سوال ۱۶ گزینه ۲



تابع $y = k([x] + [-x])$ در تمام نقاط حد دارد. پس باید $4a - 3$ و a^2 برابر باشند.

$$\begin{aligned} a^2 &= 4a - 3 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \xrightarrow{a>1} a = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+2} - 2a}{x - \sqrt{2}x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+2} - 2)}{x - \sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(x + \sqrt{2}x)}{(x - \sqrt{2}x)(x + \sqrt{2}x)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2-4) \times 2}{(x^2 - 2x) \times 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{2} \end{aligned}$$

سوال ۱۷ گزینه ۲



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \cos 2x = 0, \cos 2x < 0$$

یعنی مخرج صفر منفی است.

پس باید صورت در همسایگی راست $\frac{\pi}{4}$ عبارتی مثبت باشد.

سوال ۱۸ گزینه ۳



$$\begin{aligned} \text{مخرج} &= a \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow a \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow a = -1 \\ \text{مخرج} &= -2 \sin x \cos x + \cos x = \cos x (1 - 2 \sin x) \quad \cos x > 0 \end{aligned}$$

مخرج در همسایگی چپ $\frac{\pi}{6}$ عبارتی مثبت است. زیرا $\frac{1}{3} < \sin x$. پس صورت عبارتی مثبت است.

$$b\pi + 2a\frac{\pi}{6} > 0 \Rightarrow b\pi - \frac{\pi}{3} > 0 \Rightarrow b - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{3}$$

سوال ۱۹ گزینه ۱



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{x-4} \right] = [1^-] = 0 \\ \frac{2}{5} - 0 &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

سوال ۲۰ گزینه ۳



$$\begin{aligned} |x^2| = x^2 &\Rightarrow x^2 |x| = x^2 \Rightarrow x^2 (|x| - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1 \\ f(x) &= \begin{cases} |x| + [x] & x \in (-1, 1) - \{0\} \\ 1 + \cos \pi x & x = 0, 1, -1 \\ [x^2] - [x] & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ضابطه سوم به ازای تمام هایی که در آن x^2 صحیح ولی x غیر صحیح های صحیح منفی ناپیوسته است. همچنین همه x های صحیح منفی ناپیوسته است. پس تابع f در بیشمار نقطه ناپیوسته است.

سوال ۲۱ گزینه ۴



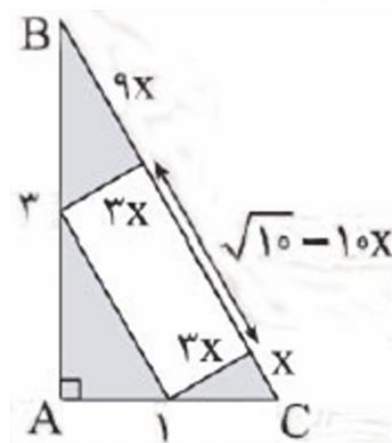
$$f'(x) = \frac{2\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\left(\tan\frac{\pi}{x}\right)\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)}{2\sqrt{3 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}} \Rightarrow f'(4) = \frac{-\frac{2\pi}{16} \times 1 \times 2}{2\sqrt{4}} = -\frac{\pi}{16}$$

سوال ۲۲ گزینه ۲



اضلاع مثلث ABC را ۱، ۳ و $\sqrt{10}$ فرض کنید. هر سه مثلث رنگ شده با مثلث ABC متشابه است و نسبت تشابه برابر $\frac{1}{3}$ است.

$$\begin{aligned} S &= 3x(\sqrt{10} - 10x) \\ S' &= 3\sqrt{10} - 60x \\ S' &= 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{20} \\ \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} &= \frac{\sqrt{10} - 10x}{3x} = \frac{\sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{20}} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$



سوال ۲۳ گزینه ۱



جمع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر است.

$$a^2 + a + 3 - 2a + 2 - 3a + 1 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

اختلاف داده ها از میانگین: $-2, -5, -2, 5, 4$

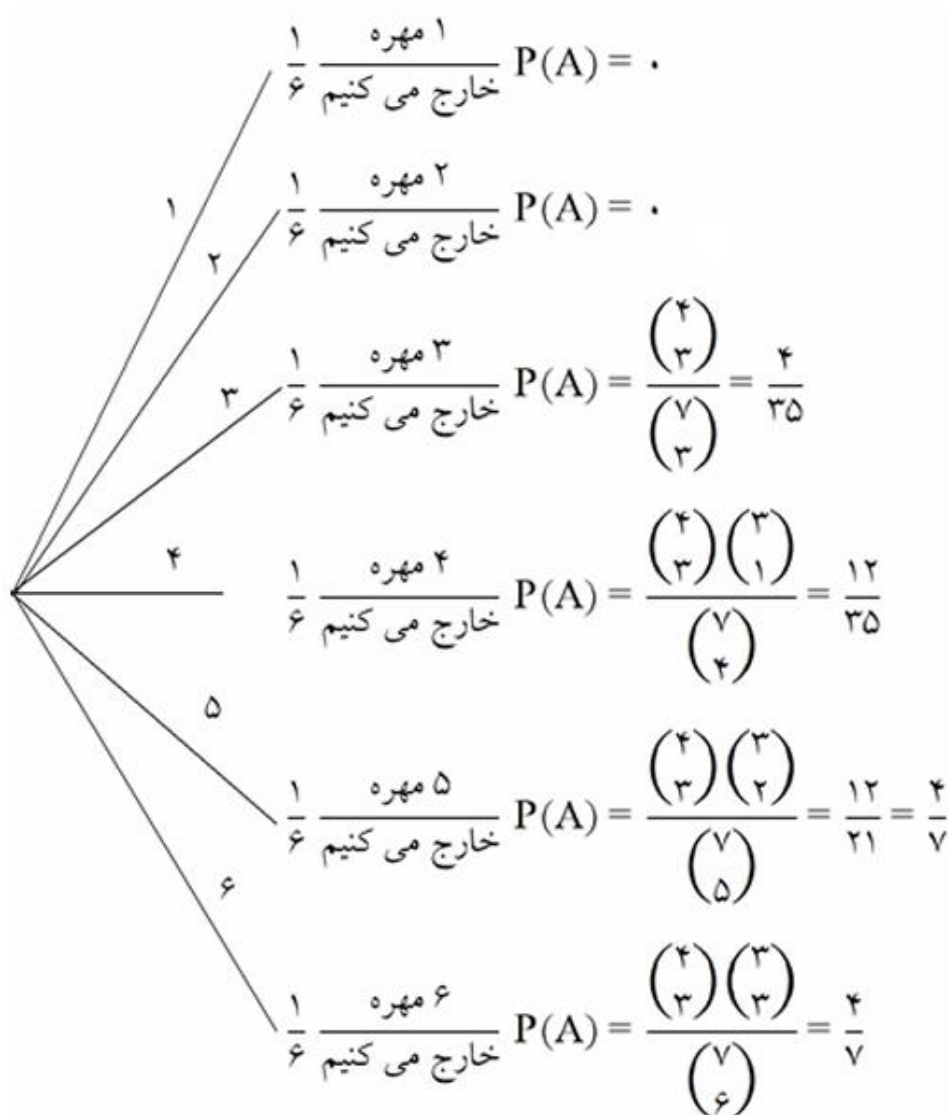
$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{N} = \frac{(-2)^2 + (-5)^2 + (-2)^2 + (5)^2 + (4)^2}{5}$$

$$= \frac{74}{5} = 14.8$$

سوال ۲۴ گزینه ۲



احتمال خارج شدن ۳ مهره قرمز را A می نامیم از احتمال شاخه ای (احتمال کل) داریم:



$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{6} \left(\frac{4}{35} + \frac{12}{35} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{4 + 12 + 20 + 20}{35} \right) = \frac{28}{105} = \frac{4}{15}$$

سوال ۲۵ گزینه ۲

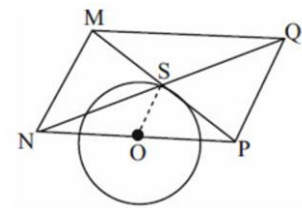


در مثلث MNP اوساط اضلاع MP و NP توسط OS به هم وصل شده است پس $OS \parallel MN$ و داریم

$$OS = \frac{MN}{2} = \frac{c}{2}$$

یعنی طول OS ثابت می باشد.

نقطه O هم ثابت است لذا محل تلاقی MP و NQ یعنی S روی دایره ای به مرکز O و شعاع $\frac{c}{2}$ می باشد.



سوال ۲۶ گزینه ۴



$$\begin{aligned} DP \perp K &= FP \perp E \text{ متقابل به راس} \\ KD \perp P &= PE \perp F = 90^\circ \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle DKP \sim \triangle PEF \Rightarrow \frac{S_{\triangle DKP}}{S_{\triangle PEF}} = \left(\frac{DP}{PE} \right)^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \triangle BFG : PE \parallel FG &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BE}{BG} = \frac{PE}{FG} \Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{PE}{5} \Rightarrow PE = \frac{35}{12} \Rightarrow DP = DE - PE \\ &= 4 - \frac{35}{12} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{S_{\triangle DKP}}{S_{\triangle PEF}} = \left(\frac{\frac{13}{12}}{\frac{35}{12}} \right)^2 = \left(\frac{13}{35} \right)^2 = \frac{169}{1225}$$

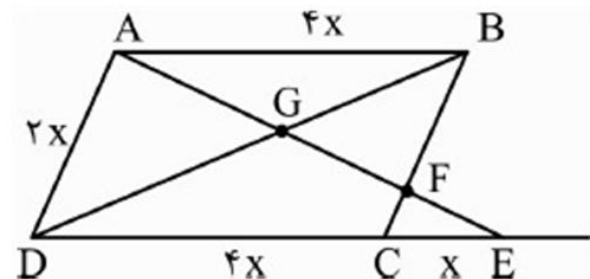
سوال ۲۷ گزینه ۳



اگر $CE = x$ آنگاه $AD = 2x$ و $DC = 4x$ دو مثلث ABG و GED بنا به حالت داشتن دو زاویه مساوی متشابه هستند. بنابراین:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AG}{GE} = \frac{BG}{GD} \Rightarrow \frac{4x}{5x} = \frac{AG}{GE} = \frac{BG}{GD}$$

از طرفی مثلث BFG و GDA نیز بنا به حالت دو زاویه مساوی متشابه هستند. بنابراین:



$$\frac{BG}{GD} = \frac{FG}{GA} \Rightarrow \frac{FG}{GA} = \frac{4}{5}$$

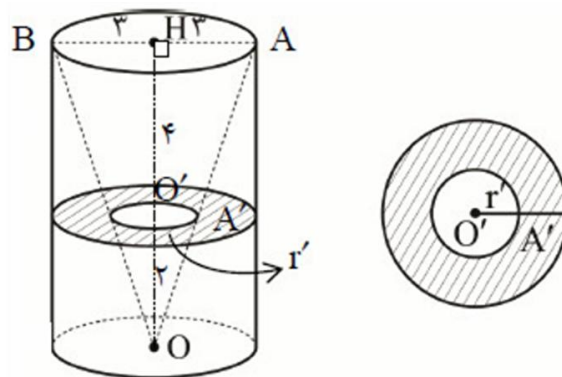
$$\frac{AG}{GE} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{GE}{GA} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\frac{FG}{GA}}{\frac{GE}{GA}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{4}} \Rightarrow \frac{FG}{GE} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{FG}{GE - GF} = \frac{16}{25 - 16} \Rightarrow \frac{GF}{FE} = \frac{16}{9}$$

سوال ۲۸ گزینه ۱



هدف محاسبه مساحت ناحیه هاشور زده است.



$$\frac{OO'}{OH} = \frac{O'A}{AH} \Rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r' = 1$$

مساحت ناحیه هاشورخورده $= \pi r^2 - \pi r'^2$

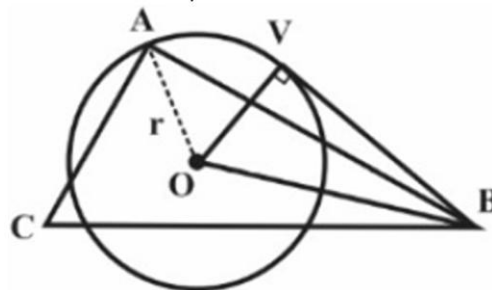
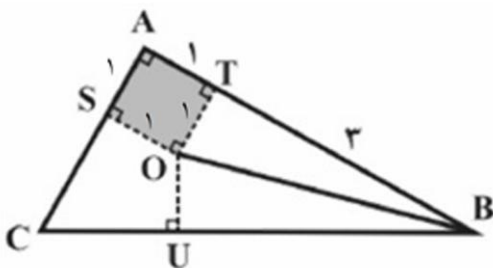
$$= 9\pi - \pi = 8\pi$$

سوال ۲۹ گزینه ۳



مثث ABC قائم الزاویه است زیرا در شکل زیر $(BC^2 = AB^2 + AC^2)$ اگر O مرکز دایره محاطی داخلی و نقاط S, T و U محل تماس این دایره با سه ضلع AB, AC, BC باشد آنگاه چهار ضلعی $ATOS$ مربعی به طول ضلع $1 = 5 - \frac{3+4+5}{2} = AT = P - a$ است پس شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث برابر 1 می باشد.

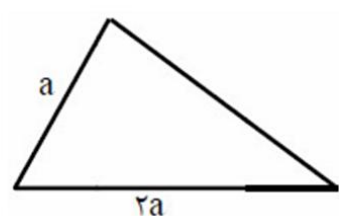
$$\begin{cases} \text{OA} = \sqrt{r}R = \sqrt{r} \\ \text{OB} = \sqrt{\text{OT}^2 + \text{BT}^2} = \sqrt{r}. \end{cases}$$



اکنون از رأس B مماس BV را بر دایره اولیه رسمی میکنیم و حال با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OBV داریم:

$$BV = \sqrt{OB^2 - OV^2} = \sqrt{10^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$$

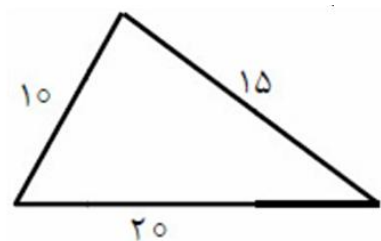
سوال ۳۰ گزینه ۲



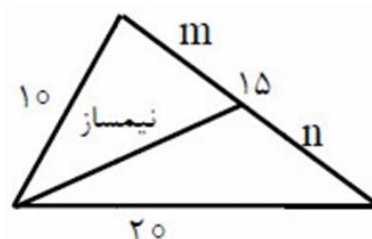
$$\text{ضلع متوسط} = \frac{a+2a}{3} = 1/5a$$

$$\text{محیط} = 45 \Rightarrow a + 2a + 1/5a = 45 \Rightarrow 4/5a = 45 \Rightarrow a = 10$$

با توجه به طول قطعاتی که نیمساز به وجود می آورد داریم



$$\frac{m}{n} = \frac{10}{20} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$



$$n = 10, m = 5$$

از طرفی $m + n = 15$ بنابراین:

حال با توجه به طول نیمساز و از رابطه آن داریم

$$\text{طول نیمساز} = \sqrt{20 \times 10 - m \times n} = \sqrt{200 - 5 \times 10} = \sqrt{150} = \sqrt{25 \times 6} = 5\sqrt{6}$$

سوال ۳۱ گزینه ۴



بنابر مسئله کتاب درسی هندسه یازدهم فصل ۳ پاره خط PQ موازی BC است. پس

$$\triangle ABC : PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{4} \quad (۱)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز مینویسیم:

$$\triangle AMC : MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow MC = 3 AM$$

$$\triangle AMC : MP \text{ نیمساز} \Rightarrow MP^2 = AM \times MC - AP \times PC$$

$$\Rightarrow \sqrt{33}^2 = AM \times 3AM - (\sqrt{5})(3\sqrt{5}) \Rightarrow 33 = 3AM^2 - 15 \Rightarrow 11 = AM^2 - 5$$

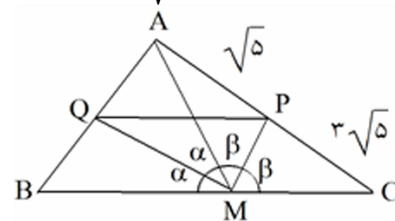
$$\Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \Rightarrow MC = 12 \Rightarrow BC = 24 \xrightarrow{\text{از (۱)}} \frac{PQ}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow PQ = 6$$

در ضمن MP و MQ نیمساز زاویه های AMC و AMB هستند:

$$\text{پس: } 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

در نتیجه مثلث MPQ قائم الزاویه است. بنابراین:

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 \Rightarrow 6^2 = \sqrt{33}^2 + MQ^2 \Rightarrow MQ^2 = 36 - 33 = 3 \Rightarrow MQ = \sqrt{3}$$



سوال ۳۲ گزینه ۴



بازتاب یک تبدیل ایزومتريک است. پس مثلث های DBA و $DA'B$ همنهشت هستند. بنابراین:

$$EC = EA' \quad \text{و} \quad DA' = 3 \quad \text{و} \quad BA' = 4 \quad \text{دو مثلث } DEA' \text{ و } EBC \text{ نیز همنهشت هستند؛ بنابراین:}$$

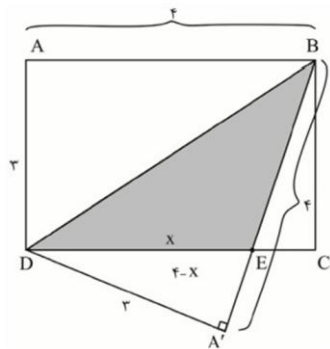
پس با فرض $DE = x$ ، آنگاه $A'E = 4 - x$ و $BE = x$ حال در مثلث قائم الزاويه DEA' رابطه فیثاغورت را استفاده می کنیم:

$$x^2 = (4 - x)^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 16 - 8x + x^2 + 9$$

$$\Rightarrow 8x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{8}$$

$$S_{BED} = \frac{1}{2} \times BC \times DE$$

$$S_{BED} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{25}{8} = \frac{75}{16}$$



سوال ۳۳ گزینه ۲



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \Rightarrow 4 + 16 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \underbrace{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}_{-\vec{c}} = \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{c}|^2 \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{b} - (1 + \vec{a} \cdot \vec{b}) = -1
 \end{aligned}$$

سوال ۳۴ گزینه ۲



$$\begin{aligned}
 AB + A + 3B + 2I = \vec{0} &\Rightarrow (A + 3I)(B + I) = I \xrightarrow{\text{تعریف وارون}} B + I = (A + 3I)^{-1} \\
 \Rightarrow B = (A + 3I)^{-1} - I &\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{مجموع درایه} &= -1
 \end{aligned}$$

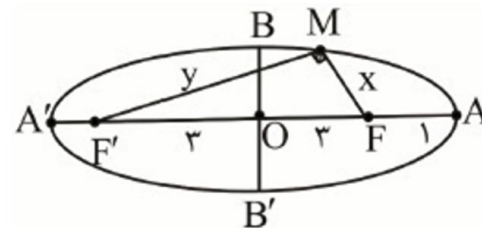
سوال ۳۵ گزینه ۳



از طرفین تساوی داده شده وارون میگیریم.

$$\begin{aligned}
 2A(A - 3I)^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (2A(A - 3I)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow ((A - 3I)^{-1}(2A)^{-1}) \\
 &= \frac{1}{4-9} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - 3I) \times \left(\frac{1}{2} A^{-1} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - 3I)A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow I - 3A^{-1} &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A^{-1} = I - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow A^{-1} \text{ های مجموع درایه} &= -1 - 2 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{-14}{3}
 \end{aligned}$$

سوال ۳۶ گزینه ۱



$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{4}a \Rightarrow a - \frac{3}{4}a = 1 \\ FA = a - c = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{4}a = 1 \Rightarrow a = 4, c = 3 \end{cases}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

طبق تعریف بیضی و رابطه فیثاغورس:

برای سادگی محاسبات فرض میکنیم:

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a = 8 \\ MF^2 + MF'^2 = (FF')^2 = (6)^2 = 36 \\ MF' = y, MF = x \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x + y = 8 \Rightarrow (x + y)^2 = 64 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{36} + 2xy = 64 \Rightarrow 2xy = 28 \Rightarrow xy = 14 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$

$$S_{F'MF} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

سوال ۳۷ گزینه ۳



$$\begin{cases} a \equiv 8 \Rightarrow a = 15x + 8 \\ b \equiv 1 \Rightarrow b = 7y + 1 \end{cases}$$

$$a + b = 1000 \Rightarrow 15x + 8 + 7y + 1 = 1000 \Rightarrow 15x + 7y = 991 \Rightarrow 15x \equiv 991$$

$$\Rightarrow x \equiv 4 \Rightarrow x = 7k + 4 \Rightarrow 15(7k + 4) + 7y = 991 \Rightarrow 7y = 931 - 15 \times 7k \Rightarrow y = 133 - 15k$$

$$\begin{cases} 1 \leq a \Rightarrow 0 \leq x \Rightarrow 0 \leq 7k + 4 \Rightarrow 0 \leq k \\ 1 \leq b \Rightarrow 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq 133 - 15k \Rightarrow 15k \leq 133 \Rightarrow k \leq 8 \\ \Rightarrow 0 \leq k \leq 8 \Rightarrow \text{تعداد مقادیر } k = 8 - 0 + 1 = 9 \end{cases}$$

سوال ۳۸ گزینه ۱



$$\overbrace{a, a, \dots, a}^v, \overbrace{, , , \dots, ,}^n \Rightarrow \bar{X} = \frac{va}{v+n}$$

$$\sigma^2 = a^2 \frac{\left(v \left(\frac{n}{n+v} \right)^2 + n \times \frac{v^2}{(n+v)^2} \right)}{n+v} = a^2 \left(\frac{vn^2 + v^2n}{(n+v)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = a^2 \times \frac{vn(n+v)}{(n+v)^2} = \frac{a^2}{(n+v)^2} \times vn = \frac{a^2}{49} \Rightarrow v^2 n \Rightarrow v(n+v)^2$$

چون ضرایب معادله درجه دوم به دست آمده جالب نیست و حل معادله درجه دوم به دست آمده وقت گیر است. از نظریه اعداد میتوانیم کمک بگیریم؛ زیرا n یک عدد طبیعی است.

$$v^2 n = v(n+v)^2 \Rightarrow \begin{cases} 6 | v^2 n', (6, v) = 1 \Rightarrow 6 | n \\ v^2 | v(n+v)^2, (v, 6) = 1 \Rightarrow v^2 | (n+v)^2 \Rightarrow v | n+v \Rightarrow v | n \end{cases}$$

بنابراین کوچک ترین مقدار طبیعی n که میتواند جواب مسئله باشد، ۴۲ است؛ زیرا

$$\left. \begin{matrix} 6|n \\ 7|n \end{matrix} \right\} \Rightarrow [6, 7] | n \Rightarrow 42 | n$$

حال ۴۲ را در معادله قرار می‌دهیم، صدق میکند:

$$7^2 \times 42 = 6(49)^2 \Leftrightarrow 7^4 \times 6 = 6 \times 7^4 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 4 + 2 = 6$$

سوال ۳۹ گزینه ۱



$$x_1 = 2y_1 + 1, x_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow y_1 \in \mathbb{W}$$

$$x_2 = 2y_2 + 1, x_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow y_2 \in \mathbb{W}$$

$$x_3 = 2y_3, x_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow y_3 \in \mathbb{N}$$

$$x_4 = 2y_4, x_4 \in \mathbb{N} \Rightarrow y_4 \in \mathbb{N}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26 \Rightarrow 2y_1 + 1 + 2y_2 + 1 + 2y_3 + 2y_4 = 26$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{26-2}{2} = 9 \\ 0 \leq y_1, y_2 \\ 1 \leq y_3, y_4 \end{array} \right\} \Rightarrow n_{\text{جدید}} = 9 - (1 + 1) = 7, k = 4$$

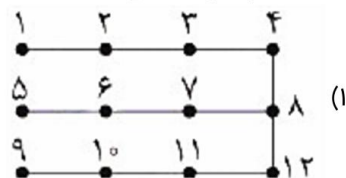
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

سوال ۴۰ گزینه ۲



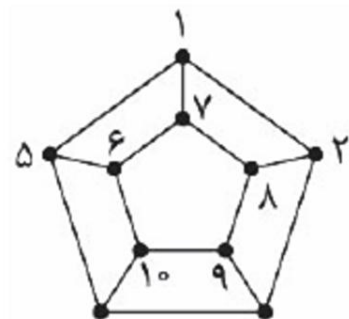
گزینه ها را بررسی میکنیم

(۱) $\frac{p}{\Delta + 1} = 4$ اما $\gamma(G) = 4$ چون $\{2, 6, 10, 8\}$ کوچکترین $\Delta = 3$ و $p = 12$

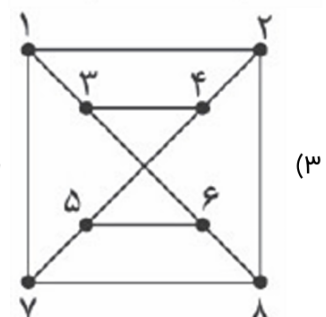


احاطه گر میباشد.

(۲) $\frac{p}{\Delta + 1} = 3$ پس $\Delta = 3, p = 10$ است. مجموعه $\{1, 9, 10\}$ احاطه گر است، پس $\gamma(G) = 3$



(۳) $\frac{p}{\Delta + 1} = 2$ اما $\gamma(G) = 3$ چون $\{1, 6, 4\}$ احاطه گر است.



(۴) $\gamma(G) = 2 + 2 = 4$ اما $\frac{p}{\Delta + 1} = 3, \Delta = 2, p = 8$ است.



فیزیک

سوال ۴۱ گزینه ۱



در ابتدا با توجه در خط معادله مربوط به آن خط را نوشته با قرار دادن t در هر معادله v مربوط به آن لحظه را یافته و در نهایت شتاب متوسط را محاسبه می کنیم.

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

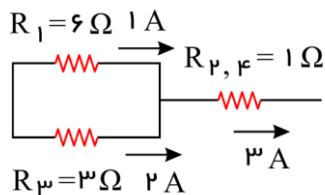
$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{t=0 - t=5} v = 2t \xrightarrow{t=2} v_1 = 4 \\ \xrightarrow{t=10 - t=14} v - 10 = -\frac{10}{4}(t - 10) \xrightarrow{t=12} v_2 = 5 \end{array} \right. \Rightarrow a_{av} = \frac{5 - 4}{10} = \frac{1}{10} \frac{m}{s^2}$$

سوال ۴۲ گزینه ۲



$$U = R_1 I_1^r t \Rightarrow 360 = 6 \times I_1^r \times 60 \Rightarrow I_1^r = 1 \Rightarrow I_1 = 1 A$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} \Rightarrow 3 = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \varepsilon = 9 V$$



سوال ۴۳ گزینه ۲

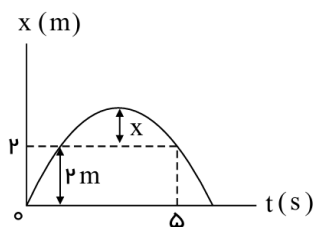


اگر طول کل مسیر را x دو زمان پیمودن آن را t فرض کنیم، داریم

$$\text{بزرگی سرعت متوسط کل} = \frac{\text{اندازه جابه‌جایی کل}}{\text{مدت زمان کل}} = \frac{\frac{x}{4} + \frac{3x}{4}}{\frac{\frac{x}{4}}{v} + \frac{\frac{3x}{4}}{2v}} =$$

$$\frac{\frac{x}{4} + \frac{3x}{4}}{\frac{x}{4v} + \frac{3x}{8v}} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{3x}{4}}{\frac{2x + 3x}{8v}} = \frac{\frac{5x}{4}}{\frac{5x}{8v}} = \frac{x \times 8v}{5x} = \frac{8}{5}v = 1.6v$$

سوال ۴۴ گزینه ۳



با توجه به این که سهمی نسبت به خطی که از رأس آن می‌گذرد، متقارن بوده و سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک به ترتیب به جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد. میتوان نوشت:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = 3 \Rightarrow \ell = 3\Delta x \Rightarrow 2 + x + x = 3 \times 2 \Rightarrow x = 2m$$

بنابراین:

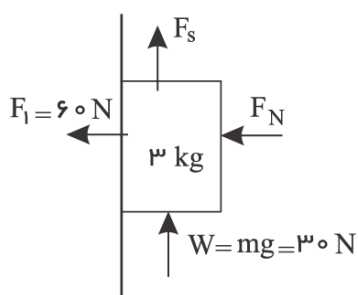
$$x_{\max} = 2 + x = 2 + 2 = 4m$$

سوال ۴۵ گزینه ۳



در حالت که جسم ساکن است با رسم نیروی وارد بر جسم داریم:

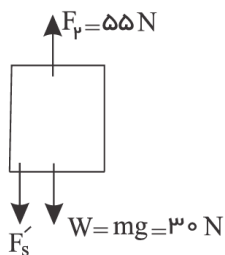
$$\begin{cases} F_{netx} = 0 \rightarrow F_N = F_1 = 60\text{ N} \\ F_{nety} = 0 \rightarrow f_s = 30\text{ N} \end{cases}$$



در حالت دوم که نیروی ۵۵ نیوتونی که از نیروی وزن ۳۰ نیوتونی بیشتر است. رو به بالا به جسم وارد میشود نیروی اصطکاک به طرف پایین خواهد بود و چون با فرض ساکن بودن f'_s جدید ۲۵ نیوتون، یعنی کمتر از $f_s = 30\text{ N}$ است. پس فرض ما درست بود و جسم ساکن می ماند.

$$F_{nety} = 0 \rightarrow F_y = f'_s + W \rightarrow 55 = f'_s + 30 \rightarrow f'_s = 25\text{ N}$$

حال در حالت دوم داریم:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s'^2} = \sqrt{\underbrace{60^2}_{(5 \times 12)} + \underbrace{25^2}_{(5 \times 5)}} \rightarrow \underbrace{R}_{(5 \times 13)} = 65\text{ N}$$

سوال ۴۶ گزینه ۴



شتاب در هنگام بالا رفتن $a_1 = -g - \frac{\text{مقاومت هوا}}{m}$ و در هنگام پایین آمدن $a_2 = -g + \frac{\text{مقاومت هوا}}{m}$ است. بنابراین اندازه شتاب در هنگام بالا رفتن بیش تر خواهد بود و در هر دو حالت شتاب عددی منفی است.

سوال ۴۷ گزینه ۴



در نمودار $v - t$ متحرک از t_1 تا t_2 ابتدا در حال دور شدن از محور t و سپس در حال نزدیک شدن به آن است. بنابراین ابتدا تندشونده و سپس کند شونده است.

مساحت زیر نمودار بالای محور است بنابراین جابه جایی مثبت است. شیب نمودار ابتدا مثبت سپس منفی است $\Delta a < 0$

سوال ۴۸ گزینه ۴



ابتدا شتاب حرکت آسانسور را محاسبه میکنیم سپس با به کارگیری قانون دوم نیوتون نیروی عمودی تیکه گاه را می یابیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \times a \times 4^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$F_N - mg = ma \Rightarrow F_N = 500 + 50 \times \frac{1}{2} \Rightarrow N = 525N$$

سوال ۴۹ گزینه ۴



اگر جرم و جنس دو سیم یکسان باشد طبق رابطه چگالی حجم دو سیم نیز یکسان خواهد بود. پس طبق رابطه زیر نسبت مقاومت دو سیم با توان چهارم قطر سیم ها رابطه عکس دارد.

$$m_A = m_B \xrightarrow{m=dV, d=\text{چگالی}} V_A = V_B \rightarrow R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{V=AL, \rho_A=\rho_B} \frac{R_A}{R_B}$$

$$= \frac{A_A}{A_B} \times \frac{\left(\frac{V}{A}\right)_A}{\left(\frac{V}{A}\right)_B} = \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 \xrightarrow{A=\pi \frac{D^2}{4}} \frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4 = \left(\frac{D_B}{3D_B}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

سوال ۵۰ گزینه ۳



با استفاده از معادله مکان - زمان داریم:

$$x = 0.04 \cos(5\pi t) \xrightarrow{x=2cm=0.02m} 0.02 = 0.04 \cos(5\pi t) \Rightarrow \cos(5\pi t) = \frac{1}{2} \Rightarrow 5\pi t = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{2}{5}n \pm \frac{1}{15}$$

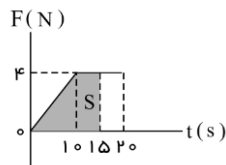
برای دومین بار داریم: $t = \frac{1}{3} s$

سوال ۵۱ گزینه ۲



مساحت سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان و محور زمان برابر با تغییر تکانه است.

بنابراین داریم:



$$\Delta p = S$$

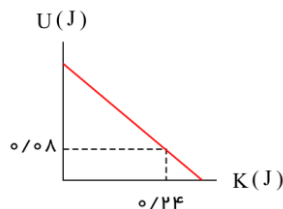
$$p_2 - p_1 = S \xrightarrow{p_1 = mv_1 = 0} p_2 = S = \frac{(1.5 + 2.0) \times 4}{2} = 7.0 \frac{kg \cdot m}{s}$$

سوال ۵۲ گزینه ۴



برای محاسبه معادله حرکت باید در رابطه $x = A \cos(\omega t)$ به جای A و ω مقدار هر یک را قرار دهیم بنابراین ابتدا از رابطه $E = K + U$ انرژی مکانیکی را به دست می آوریم:

$$E = U + K \xrightarrow{U=0.08J, K=0.24J} E = 0.08 + 0.24 \Rightarrow E = 0.32J$$



سپس با استفاده از رابطه $E = 2\pi^2 m f^2 A^2$ دامنه نوسان را حساب می کنیم.

$$E = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

$$\frac{m = 100g = 0.1kg}{\pi^2 = 10, f = 2Hz} \rightarrow 32 \times 10^{-2} = 2 \times 10 \times 0.1 \times 4 \times A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = 4 \times 10^{-2} m \Rightarrow A = 2 \times 10^{-1} m \Rightarrow A = 0.2m$$

در نهایت ω را حساب میکنیم و معادله حرکت را می نویسیم:

$$\omega = 2\pi f \xrightarrow{f=2Hz} \omega = 2\pi \times 2 \Rightarrow \omega = 4\pi rad/s \rightarrow x = A \cos(\omega t) \Rightarrow x = 0.2 \cos(4\pi t)$$

سوال ۵۳ گزینه ۴



$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = m \times 500 \times (35 - (-10))$$

$$P = \frac{3000}{1 \times 6}$$

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow \frac{3000}{1 \times 60} = \frac{m \times 500 \times (35 - (-10))}{180} \Rightarrow m = 0.4 \text{ kg} = 400 \text{ g}$$

سوال ۵۴ گزینه ۱



با توجه به نمودار داریم:

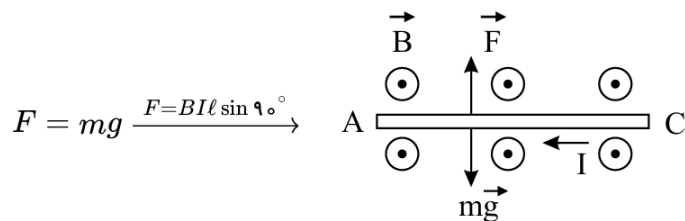
$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{30} \Rightarrow T = \frac{\pi}{15}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_m = \frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{20}{5} = 4 \text{ A} \\ \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30 \text{ rad/s} \end{array} \right. \Rightarrow I = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 4 \sin(30t)$$

سوال ۵۵ گزینه ۲



چون نیروی گرانش به طرف پایین بر سیم وارد میشود نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ باید رو به بالا بر سیم وارد شود. در این حالت برای صفر بودن نیروی نخهای نگه دارنده باید $F = mg$ باشد. بنابراین میتوان نوشت:



$$IB = mg \frac{m = 8 \times 10^{-3} \text{ kg}, \ell = 8 \times 10^{-2} \text{ m}}{B = 0.8 \text{ T}, g = 10 \text{ N/kg}} \Rightarrow I \times 8 \times 10^{-2} \times 0.8 = 8 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow I = 1.25 \text{ A}$$

چون جهت $\vec{B}$ عمود بر صفحه کاغذ و رو به بیرون (برون سو) و جهت $\vec{F}$ رو به بالا است با استفاده از قاعده دست راست جهت جریان از C به طرف A می باشد.

سوال ۵۶ گزینه ۴



آب 40°C $\xleftarrow{Q_2}$ آب 10°C $\xrightarrow{Q_1}$ آب صفر درجه $\xrightarrow{Q_1}$ یخ صفر درجه

$$L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}, c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 4.2 \frac{\text{J}}{\text{gK}}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$mL_F + mc(\Delta\theta) = m'c(\Delta\theta') \Rightarrow m \times 336 + m \times 4.2 \times (10 - 0) = 6000 \times 4.2 \times (40 - 10)$$

$$336m + 4.2m = 6000 \times 30 \times 4.2 \Rightarrow 378m = 6000 \times 30 \times 4.2$$

$$\Rightarrow m = \frac{6000 \times 30 \times 4.2}{378} = 2000 \text{ g}$$

سوال ۵۷ گزینه ۳



$$I = \frac{P}{A} = \frac{510 \times 10^{-6}}{34 \times 10^{-2}} = 15 \times 10^{-2}$$

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{15 \times 10^{-2}}{10^{-12}} = 10 \log 15 \times 10^{10}$$

$$\beta = 10 (\log 3 + \log 5 + \log 10^{10}) \quad \beta = 112 \text{ dB}$$

سوال ۵۸ گزینه ۳



حجمی که با رابطه چگالی و جرم جسم به دست می آید حجم خالص (توپر) کره میباشد.

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 2.7 = \frac{1080}{V} \Rightarrow V = 400 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم واقعی}$$

یعنی اگر کره حفره نداشته باشد. حجم آن 400 cm^3 است. اما حجم کره ای که حفره دارد برابر است با

$$V' = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow V' = \frac{4}{3} \times 3 \times (5)^3 \Rightarrow V' = 500 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم ظاهری}$$

$$\text{حجم حفره} = \text{حجم واقعی} - \text{حجم ظاهری} \Rightarrow V_{\text{حفره}} = 500 - 400 = 100 \text{ cm}^3$$

$$\text{درصد حجم حفره به حجم کره} : \frac{V_{\text{حفره}}}{V'} = \frac{100}{500} \times 100 = 20\%$$

سوال ۵۹ گزینه ۱



ابتدا انرژی فوتون گسیلی را می یابیم میدانیم که این انرژی معادل اختلاف انرژی مربوط به دو تر از انرژی مجاز است.

$$\Delta E = hf \Rightarrow \Delta E = 4 \times 10^{-15} \times 4,75 \times 10^{14} = 1,9 \text{ eV}$$

با به دست آوردن $1,9 \text{ eV}$ باید ببینیم که اختلاف انرژی بین کدام دو تر از برابر این عدد میشود که این مرحله با و سعی و خطا انجام می شود.

$$\Delta E = E_3 - E_2 = -1,5 + 3,4 = 1,9 \text{ eV}$$

یعنی n_3 به n_2

سوال ۶۰ گزینه ۱



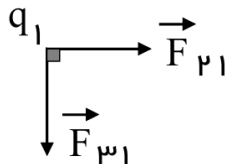
اگر m و n به ترتیب تعداد α و β^- گسیلی باشد با نوشتن معادله واپاشی داریم:

$${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{82}^{206}\text{Pb} + m {}_2^4\alpha + n {}_{-1}^0\beta \Rightarrow \begin{cases} 238 = 206 + 4m + n \times 0 \Rightarrow m = 8 \\ 92 = 82 + 2m + n(-1) \Rightarrow n = 6 \end{cases}$$

سوال ۶۱ گزینه ۲



مطابق شکل برآیند نیروهای وارد بر بار q_1 بر حسب بردارهای یکه به صورت

$$\vec{F}_T = F_{21}\vec{i} - F_{31}\vec{j}$$


خواهد بود. مقدار F_{21} مشخص است. اما برای یافتن F_{31} خواهیم داشت:

چون مطابق شکل نیروهای F_{21} و F_{31} بر هم عمودند. برآیند آنها برابر:

$$\begin{cases} F_{21} = \frac{kq_2q_1}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{(6 \times 10^{-2})^2} = 30 \text{ (N)} \\ |F_T| = 30\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow 30\sqrt{5} = \sqrt{30^2 + F_{31}^2}$$

به توان ۲ $\rightarrow 30^2 \times 5 = 30^2 + F_{31}^2 \rightarrow F_{31}^2 = 4 \times 30^2$

جنر $\rightarrow F_{31} = 2 \times 30 = 60 \text{ (N)}$

حالا میتوان F_T را بر حسب بردارهای یکه نوشت:

$$\vec{F}_T = F_{21}\vec{i} - F_{31}\vec{j} = 30\vec{i} - 60\vec{j}$$

سوال ۶۲ گزینه ۲



با فرض مثبت بودن q داریم:

$$E_{q'} = -\frac{1}{4}E \leftarrow \bullet \rightarrow E_q = E$$

A

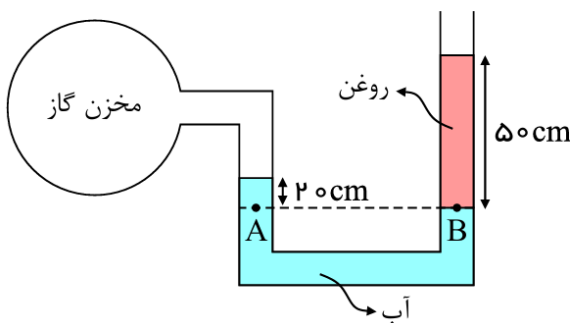
طبق شکل $E_q = 4E_{q'}$

$$\frac{q}{x^2} = 4 \times \frac{q'}{(4x)^2} \Rightarrow \frac{q'}{q} = 4$$

سوال ۶۳ گزینه ۴



با استفاده از برابری فشار در نقاط هم ترا از یک مایع ساکن داریم: (فشار پیمانه ای را با P_g نشان می دهیم.)



$$P_A = P_B$$

$$\Rightarrow P_{\text{مخزن}} + P_{\text{آب}} = P_o + P_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{مخزن}} - P_o = P_{\text{روغن}} - P_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow P_g = \rho_{\text{روغن}} gh_{\text{روغن}} - \rho_{\text{آب}} gh_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow P_g = (0.8 \times 10^3 \times 10 \times 50 \times 10^{-2}) - (10^3 \times 10 \times 20 \times 10^{-2})$$

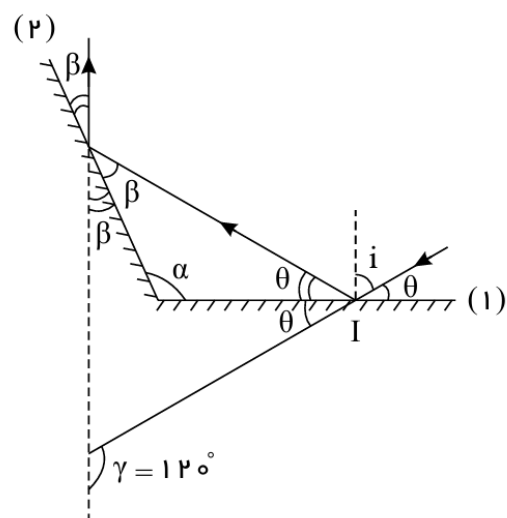
$$\Rightarrow P_g = 2 \times 10^3 Pa$$

سوال ۶۴ گزینه ۴



$$\begin{cases} (2\theta + 2\beta) = \gamma \Rightarrow (\theta + \beta) = \frac{\gamma}{2} \\ \theta + \beta = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \gamma = 360^\circ - 2\alpha \end{cases}$$

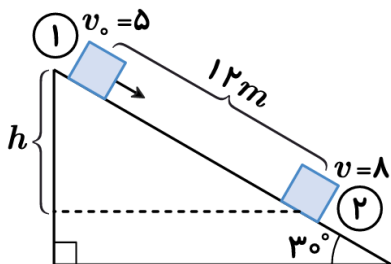
زاویه θ_i ، 20° افزایش پیدا می کند. اما γ به θ_i بستگی ندارد چون α ثابت است. γ نیز ثابت خواهد ماند.



سوال ۶۵ گزینه ۴



قبل از هر چیز می دانیم که در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است. حال اگر نقطه (۲) را مبدا پتانسیل گرانشی فرض کنیم، داریم:



$$h = \frac{L}{2} = \frac{12}{2} = 6m$$

$$E_2 - E_1 = W_{fk} \Rightarrow (K_2 + \cancel{U_{g_2}}) - (K_1 + U_{g_1})$$

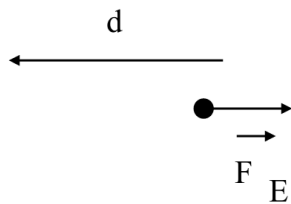
$$\frac{1}{2}mv^2 - \left[mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \right] = W_{fk}$$

$$\frac{1}{2} \times 2(8)^2 - \left[2 \times 10 \times 6 + \frac{1}{2} \times 2 \times 25 \right] = W_{fk} \Rightarrow W_{fk} = -81$$

سوال ۶۶ گزینه ۱



از آنجایی که پروتون پرتاب میشود. تنها نیروی مؤثر وارد بر آن در مسیر حرکت نیرویی است که از سوی میدان الکتریکی یکنواخت بر آن وارد میشود. قضیه کار - انرژی را از نقطه A تا توقف می نویسیم:

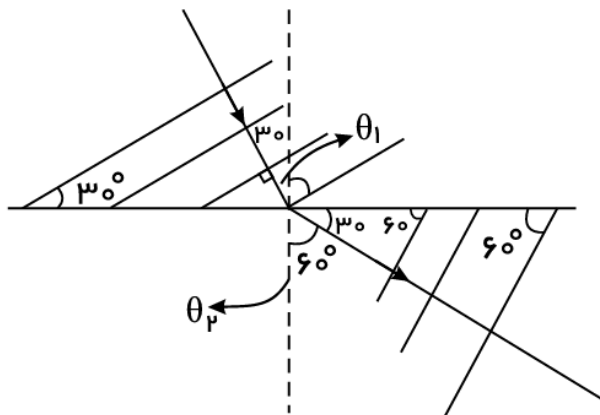


$$W_t = \Delta K \rightarrow W_E = 0 - \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow |q| E d \cos \theta = -\frac{1}{2} m v^2$$

$$\rightarrow 1.6 \times 10^{-19} \times 2000 \times d \times \cos^{-1} 18^\circ = -\frac{1}{2} \times 1.6 \times 10^{-27} \times (10^5)^2$$

$$\rightarrow d = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ mm}$$

سوال ۶۷ گزینه ۱



$$\frac{\lambda_r}{\lambda_1} = \frac{v_r}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_1} \rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{\lambda_r}{0.6} = \sqrt{3} \rightarrow \lambda_r = 0.6\sqrt{3} \text{ (m)} = 60\sqrt{3} \text{ cm}$$

سوال ۶۸ گزینه ۱

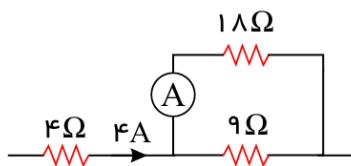


$$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon| = Blv \\ I = \frac{|\varepsilon|}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{Blv}{R} \Rightarrow v = \frac{(5000 \times 10^{-4}) \times (40 \times 10^{-2}) \times 4}{R} \Rightarrow R = 0.4 \Omega$$

سوال ۶۹ گزینه ۱



حالت اول:

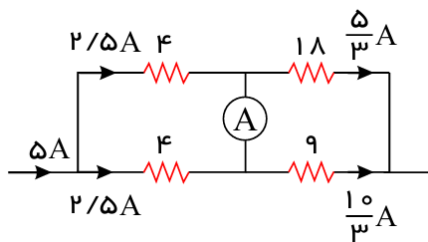


$$R_{eq} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} + 4 = 10 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{40}{10} = 4 A$$

$$\text{عدد آمپرسنج} = \frac{9}{27} \times 4 = \frac{36}{27} A$$

حالت دوم:



$$R_{eq} = \frac{4 \times 4}{4 + 4} + \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 8 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{40}{8} = 5A$$

$$\text{عدد آمپرسنج: } \frac{10}{3} - 2,5 = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5}{6}A$$

$$\text{خواسته سؤال: } \frac{\frac{5}{6}}{\frac{36}{27}} = \frac{5}{8}$$

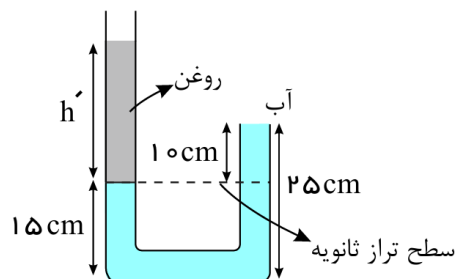
سوال ۷۰ گزینه ۱



با توجه به شکل اگر آب در شاخه سمت راست $5cm$ بالا بیاید. در شاخه سمت چپ $5cm$ پایین می رود. حال با توجه به برابری فشار در نقاط هم تراز از یک مایع ساکن داریم:

$$= \rho_{\text{آب}}gh_{\text{آب}} + P_0 + \rho_{\text{روغن}}gh_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow \text{حداکثر مجموع ارتفاع آب و روغن} = 15 + 12,5 = 27,5cm \Rightarrow h' = 12,5cm \xrightarrow[\substack{\rho_{\text{روغن}} = 0,8 \frac{g}{cm^3}, \rho_{\text{آب}} = 1 \frac{g}{cm^3}}]{h_{\text{آب}} = 10cm} 0,8 \times h' = 1 \times 10$$



سوال ۷۱ گزینه ۲



محاسبه کار انجام شده در فرآیند ۱ به ۲ (هم حجم)

$$W_{1 \rightarrow 2} = -P_1(V_2 - V_1) = -(3 \times 10^5) \times (5 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-3}) = -900 \text{ J}$$

محاسبه کار انجام شده در فرآیند ۲ به ۳ (هم فشار):

کار انجام شده توسط گاز صفر است، زیرا:

$$\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} = -900 \text{ J} + 0 \text{ J} = -900 \text{ J}$$

$$\Delta U_{\text{کل}} = U_3 - U_1 = 1500 \text{ J} - 1000 \text{ J} = 500 \text{ J}$$

محاسبه گرمای مبادله شده کل با استفاده از قانون اول ترمودینامیک:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W \Rightarrow Q_{\text{کل}} = 500 \text{ J} - (-900) \text{ J} = +1400 \text{ J}$$

در کل این فرآیند گاز ۱۴۰۰ ژول گرما مبادله کرده است. از آنجاییکه مقدار Q مثبت است، گاز گرما گرفته است.

سوال ۷۲ گزینه ۱



ضریب القاوری سیملوله از رابطه $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$ به دست می آید.

حال به بررسی فاکتورهای A (مساحت مقطع سیملوله) N (تعداد دور سیم) و l (طول سیملوله) در این دو القاگر می پردازیم

$$A = \pi R^2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 4$$

$$N = \frac{\text{طول سیم}}{\text{محیط هر حلقه}} = \frac{a}{2\pi R} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

$$l = N \times (\text{ضخامت سیم}) \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \times \frac{A_1}{A_2} \times \frac{l_2}{l_1} = 2^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

سوال ۷۳ گزینه ۲



در پراش موج بسامد موج تغییر نمیکند و اگر محیط انتشار موج قبل از مانع و بعد از مانع یکسان باشد تندی و طول موج موج پراشیده شده نسبت به موج اولیه هیچ تغییری ندارد پس در همه شکل ها تندی امواج پراشیده شده یکسان است.

سوال ۷۴ گزینه ۱



نیروی طناب نیروی مرکزگرا را تأمین میکند.

$$m = \frac{f_0}{10} = 4 \text{ kg}$$

$$F = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow f_{00} = 4 \times \frac{v^2}{1} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

سوال ۷۵ گزینه ۳



تمام موارد درست هستند.

شیمی

سوال ۷۶ گزینه ۳



نور نشر شده در اثر بازگشت الکترون در اتم هیدروژن از حالت برانگیخته به حالت های پایدارتر ممکن است در ناحیه فرابنفش قرار بگیرد.

سوال ۷۷ گزینه ۲

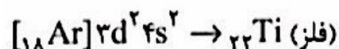
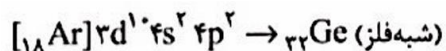


عبارت های (آ) و (پ) درست هستند.

بررسی عبارت ها:

(آ) نافلز مایع، برم (Br_{35}) است و نخستین نافلز دوره دوم جدول تناوبی نیز کربن (C_6) است. تفاوت عدد اتمی این دو عنصر برابر ۲۹ است و در آرایش الکترونی ${}_{29}Cu$ ($[Ar]3d^{10}4s^1$) نیز ۷ الکترون با $l = 0$ وجود دارد.

(ب) آرایش الکترونی فشرده عنصر مورد نظر به صورت زیر است:



(پ) مجموع شمار عنصرها در ۳ دوره نخست جدول برابر ۱۸ است.

(ت) عدد اتمی دومین فلز گروه ۳ جدول تناوبی برابر ۳۹ بوده و شمار الکترون های دارای $l = 2$ در آرایش الکترونی آن برابر ۱۱ است. کانیون پایدار عنصری با عدد اتمی ۱۱ (Na_{11}) یک بار مثبت است.

سوال ۷۸ گزینه ۲



عنصرهایی که در خانه ۷ و ۱۲ جدول جای دارند، به ترتیب N_7 و Mg_{12} بوده و فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از این دو عنصر به صورت Mg_3N_2 است و در این ترکیب نسبت شمار کاتیون به آنیون برابر $\frac{3}{2}$ است.

بررسی گزینه ۱ واکنش پذیرترین فلز و نافلز دوره سوم جدول تناوبی به ترتیب Na و Cl هستند.

سوال ۷۹ گزینه ۲



با توجه به ساختارهای داده شده X و Y به ترتیب متعلق به گروه های ۱۵ و ۱۶ جدول تناوبی هستند و چون این عناصر متعلق به دوره سوم جدول تناوبی هستند X فسفر (P) و Y گوگرد (S) است.

ساختار لوویس SO_3 و SO_2 به صورت زیر است و نسبت شمار جفت الکترون های ناپیوندی به پیوندی در هر دو ترکیب برابر ۲ است.



بررسی سایر گزینه ها:

(۱) PCl_3 یک ماده تجاری مهم در تهیه حشره کش ها است.

(۳) فرمول شیمیایی ترکیب های یونی مورد نظر میتواند به صورت CrP و CuS باشد.

(۴) در اثر سوختن گوگرد نور حاصل آبی رنگ است و رنگ شعله گاز شهری که به طور کامل میسوزد نیز آبی است.

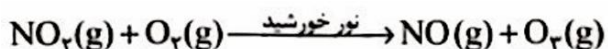
سوال ۸۰ گزینه ۱



نقطه جوش O_3 از O_2 بیشتر است. بنابراین در دمایی که O_2 مایع می شود. اوزون (آلوتروپ واکنش پذیرتر اکسیژن) نیز مایع است.

بررسی سایر گزینه ها:

(۲) واکنش انجام شده به صورت زیر است.



در شرایط یکسان گاز NO_2 چون جرم مولی بیشتری نسبت به گاز NO دارد چگالی بیشتری نیز دارد.

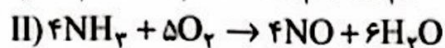
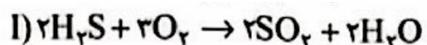
(۳) درست

(۴) فراوان ترین جزء سازنده هواکره گاز نیتروژن (N_2) است.

سوال ۸۱ گزینه ۴



معادله موازنه شده واکنش های داده شده به صورت زیر است:



دقت کنید که در شرایط STP حالت فیزیکی H_2O به صورت گاز نیست.

$$?L SO_2 = 21.07 \times 10^{24} \times \frac{1 \text{ mol گاز } (H_2S, O_2)}{6.02 \times 10^{23} \text{ مولکول}}$$

$$\times \frac{2 \text{ mol } SO_2}{5 \text{ mol گاز } (H_2S, O_2)} \times \frac{22.4 L SO_2}{1 \text{ mol } SO_2} = 213.6 L SO_2$$

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) در دما و فشار ثابت، نسبت حجمی گازها با نسبت مولی آنها برابر است و برابر با نسبت ضریب استوکیومتری آنها ($\frac{4}{5}$) است.

(۲) به ازای تولید یک مول H_2O در واکنش (I) $\frac{3}{4}$ مول O_2 در واکنش (II) $\frac{5}{6}$ مول O_2 مصرف می شود.

$$3) \text{ فراورده } 10 \text{ mol} \times \frac{18 \text{ mol واکنش دهنده}}{9 \text{ mol واکنش دهنده}} = 20 \text{ mol فراورده}$$

سوال ۸۲ گزینه ۴



در ترکیب های HF ، HCl و HBr ، با افزایش جرم مولی هالوژن درصد جرمی هیدروژن در ترکیب کاهش می یابد اما مقایسه نقطه جوش این ۳ ترکیب به صورت $HCl < HBr < HF$ است.

بررسی سایر گزینه ها

(۱) در محلول حاصل شمار مول های حلال (اتانول) بیشتر است و از آنجا که جرم مولی اتانول ($46 g \cdot mol^{-1}$) نیز نسبت به آب ($18 g \cdot mol^{-1}$) بیشتر است پس جرم حلال نیز از حل شونده بیشتر خواهد بود.

(۲) جرم ترکیب یونی اولیه با مجموع جرم یون های حاصل برابر است.

(۳) گلوکومتر، میلی گرم گلوکز را در هر دسی لیتر از خون فرد نشان میدهد:

$$\frac{105 \times 10^{-3} \text{ g گلوکز}}{10 \text{ L خون}} = \frac{105 \text{ g گلوکز}}{1 \text{ L خون}}$$

سوال ۸۳ گزینه ۳



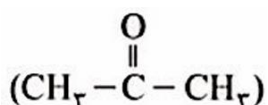
ترکیب های یونی $CaSO_4$ و $Ca_3(PO_4)_2$ به ترتیب کم محلول و نامحلول در آب هستند.

بررسی سایر گزینه ها

(۱) آمونیوم (NH_4^+) ، یک کاتیون ۵ اتمی است.

(۲) در هر دو فرایند جهت حرکت مولکول های آب از طریق غشاء دو طرفه است.

(۴) نیروی بین مولکولی در استون، از نوع وان دروالسی است.



سوال ۸۴ گزینه ۲



فلز مصرفی در فرایند ترمیت، آلومینیم است، از آنجا که واکنش پذیری Al از K کمتر است پس استخراج فلز Al از ترکیب هایش نسبت به استخراج فلز K از ترکیب هایش آسان تر است.

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) واکنش پذیری فلز Ti از فلز Fe بیشتر است.

(۳) استخراج فلزات مس و طلا با استفاده از روش گیاه پالایی به صرفه است. با توجه به اینکه واکنش پذیری فلزهای Cu و Au نسبت به فلز Fe کمتر است، تأمین شرایط نگهداری آنها آسان تر است.

(۴) محلول حاوی کاتیون های $Fe^{3+} (aq)$ ، زردرنگ است.

سوال ۸۵ گزینه ۴



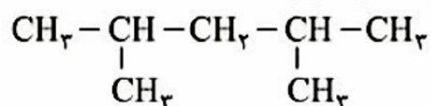
با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$\begin{aligned} \text{گاز } (CO_2, CO) = 5.8 \text{ g FeCO}_3 \times \frac{1 \text{ mol FeCO}_3}{116 \text{ g FeCO}_3} \\ \times \frac{(2 \times 44 + 1 \times 28) \text{ g گاز}}{3 \text{ mol FeCO}_3} \times \frac{60}{100} = 1.16 \text{ g گاز} \end{aligned}$$

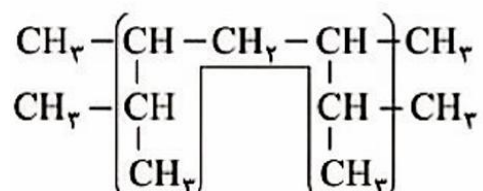
سوال ۸۶ گزینه ۳



ساختار ۲، ۴- دی متیل پنتان به صورت زیر است:



و در اثر اعمال تغییر ذکر شده ساختار ترکیب به دست آمده به صورت زیر است:



نام آیوپاک ترکیب حاصل به صورت ۲، ۳، ۵، ۶ - تترامتیل هپتان است و در ساختار این ترکیب نیز همانند ترکیب اولیه تنها یک گروه CH_3 وجود دارد.

سوال ۸۷ گزینه ۳



فرمول مولکولی پنجمین آلکین به صورت C_5H_{10} بوده و فرمول مولکولی سیکلوپنتان نیز C_5H_{10} است پس هر دو ترکیب دارای ۱۰ پیوند اشتراکی میان اتم های C و H در ساختار خود هستند.

بررسی سایر گزینه ها

(۱) درست

(۲) نسبت شمار اتم H به C در بنزن (C_6H_6) و نفتالن ($C_{10}H_8$) به ترتیب برابر با ۱ و ۸/۰ است.

(۴) هر مول استیلن (C_2H_2) با دو مول H_2 واکنش می دهد. در حالی که هر مول اتیلن (C_2H_4) با یک مول H_2 واکنش میدهد.

سوال ۸۸ گزینه ۲



با توجه به معادله (I) و (II) آنتالپی پیوندهای $Cl - Cl$ و $N \equiv N$ به ترتیب برابر با ۲۴۰ و ۹۴۵ کیلوژول بر مول است و با توجه به معادله واکنش داریم:

$$\Delta H(\text{واکنش}) = \left[\begin{array}{c} \text{مجموع آنتالپی پیوندها در} \\ \text{مواد واکنش دهنده} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{مجموع آنتالپی پیوندها} \\ \text{در مواد فراورده} \end{array} \right]$$

سوال ۸۹ گزینه ۱

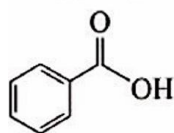


عبارت های (ب) و (پ) درست هستند.

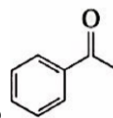
بررسی عبارت ها

آ) استر مورد نظر اتیل بوتانوات با فرمول مولکولی $C_6H_{12}O_2$ است و ترکیب آلی موجود در بادام نیز بنزآلدهید با فرمول مولکولی C_7H_6O است.

ب) در ساختار هر سه ترکیب گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) وجود دارد و هر سه ترکیب دارای پیوند $C = C$ و ساختار حلقوی هستند.



پ) ترکیب مورد نظر بنزوئیک اسید با ساختار است که در اثر قرار دادن گروه متیل به



جای گروه $-OH$ در آن ترکیب به دست می‌آید که همانند ۲ - هپتانون (ترکیب آلی موجود در میخک)، دارای گروه عاملی کتون است.

ت) آلدهید یک پیوند $C = O$ در گروه عاملی خود دارد و اثر نیز برای اینکه ایزومر آلدهید باشد باید یک پیوند $C = C$ داشته باشد.

سوال ۹۰ گزینه ۱



قسمت اول: ΔH واکنش انجام شده برابر است با:

$$272 \text{ kJ} = 60 \text{ g واکنش دهنده} \times \frac{|\Delta H| \text{ kJ}}{30 \text{ g واکنش دهنده}}$$

$$\Rightarrow |\Delta H| = 136 \text{ kJ}$$

چون واکنش گرماده است $\Delta H = -136 \text{ kJ}$

با توجه به آنتالپی سوختن مواد شرکت کننده در واکنش و با استفاده از قانون هس میتوان از رابطه زیر برای محاسبه ΔH واکنش استفاده نمود:

$$\Delta H = \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن مواد واکنش دهنده} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن مواد فراورده} \right]$$

$$\Rightarrow -136 = (-1410 - 286) - \Delta H_{\text{سوختن اتان}}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن اتان}} = -1560 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

قسمت دوم: با توجه به آنتالپی سوختن اتان و پروپان میتوان آنتالپی سوختن متان را محاسبه نمود:

$$\Delta H(\text{C}_3\text{H}_8) - \Delta H(\text{C}_2\text{H}_6) = -2230 - (-1560) = -670 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta H(\text{C}_2\text{H}_6) - \Delta H(\text{CH}_4) = -670$$

$$\Rightarrow \Delta H(\text{CH}_4) = -890 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

پس ارزش سوختی متان برابر است با:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{\text{اندازه آنتالپی سوختن}}{\text{جرم مولی}} = \frac{890}{16} \simeq 55.6 \frac{\text{kJ}}{\text{g}}$$

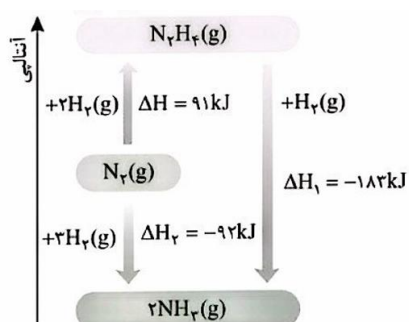
سوال ۹۱ گزینه ۴



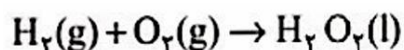
عبارت بیان شده در گزینه (۴) برخلاف سایر گزینه ها نادرست است؛ در واکنش سوختن کامل گرافیت ΔH مرحله نخست تولید (CO) را نمیتوان به روش تجربی تعیین کرد.

بررسی سایر گزینه ها:

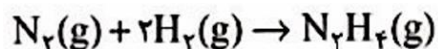
(۱) نمودار تغییرات آنتالپی مربوط به این فرایند به صورت زیر است:



(۲) معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است و در آن ضریب استوکیومتری هر دو واکنش دهنده برابر یک است:



(۳) معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



واکنش دهنده ها مولکول های دواتمی هستند و برای پیوندهای موجود در ساختار آنها نیازی به استفاده از واژه میانگین آنتالپی پیوند نیست.

سوال ۹۲ گزینه ۲



اختلاف جرم $KClO_3$ مصرفی و جرم KCl تولیدی برابر با جرم O_2 تولیدی است:

$$? \text{ mol } O_2 = 1/92 \text{ g } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} = 0/06 \text{ mol } O_2$$

پس نمودار داده شده مربوط به O_2 است و با توجه به سرعت تولید این گاز در ۲۰ ثانیه نخست داریم:

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta n}{V \Delta t} \Rightarrow 1/2 \times 10^{-2} = \frac{0/02}{V \times \frac{20}{60}} \Rightarrow V = \Delta L$$

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) نادرست

(۳) در $t = 35 \text{ s}$ مول O_2 تولیدی برابر $0/03$ مول بوده و در نتیجه شمار مول $KClO_3$ مصرفی برابر است با:

$$? \text{ mol } KClO_3 = 0/03 \text{ mol } O_2 \times \frac{2 \text{ mol } KClO_3}{3 \text{ mol } O_2} = 0/02 \text{ mol } KClO_3$$

پس $0/02$ مول $KClO_3$ تجزیه شده و جرم آن برابر است با:

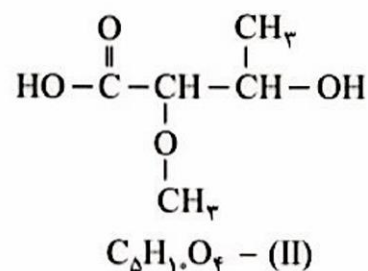
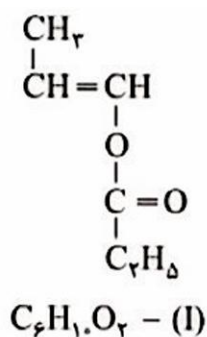
$$? \text{ g } KClO_3 = 0/02 \text{ mol } KClO_3 \times \frac{122/5 \text{ g } KClO_3}{1 \text{ mol } KClO_3} = 2/45 \text{ g } KClO_3$$

تفاوت سرعت تولید فراورده ها برابر 2×10^{-4} مول بر ثانیه است.

سوال ۹۳ گزینه ۳



ساختار و فرمول شیمیایی مونومر سازنده هر یک از پلیمرهای داده شده به صورت زیر است:



با توجه به ساختارهای داده شده شمار اتم ها در فرمول مولکولی مونومر سازنده پلیمرهای (I) و (II) به ترتیب برابر با ۱۸ و ۱۹ است.

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) درست

(۲) پلیمر (I)، در اثر شکستن یکی از پیوند های اشتراکی میان اتم های کربن دارای پیوند $\text{C} = \text{C}$ به دست آمده است.

(۴) در ساختار مونومر سازنده پلیمر (II) گروه های عاملی هیدروکسیل کربوکسیل و اتری وجود دارد.

سوال ۹۴ گزینه ۴

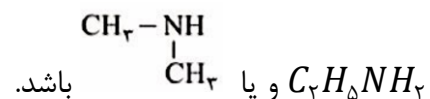


عبارت های (آ) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت ها

(آ) استر مورد نظر دارای ساختار $\text{H}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{O}-\text{CH}_3$ است و از واکنش متانول (CH_3OH) و متانوئیک اسید (HCOOH) به دست آمده است.

(ب) اسید مورد نظر، استیک اسید (CH_3COOH) است اما آمین مورد نظر میتواند دارای دو ساختار



(پ) فرمول مولکولی آمین مورد نظر $\text{C}_2\text{H}_7\text{N}$ است و تفاوت جرم مولی آن با متیل آمین (CH_3-NH_2) که ساده ترین آمین است برابر با 14 g.mol^{-1} است

(ت) فرمول مولکولی آمید به صورت $\text{C}_2\text{H}_5\text{NO}$ (59 g.mol^{-1}) بوده و فرمول مولکولی اسید به صورت $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}$ (60 g.mol^{-1}) است.

سوال ۹۵ گزینه ۲



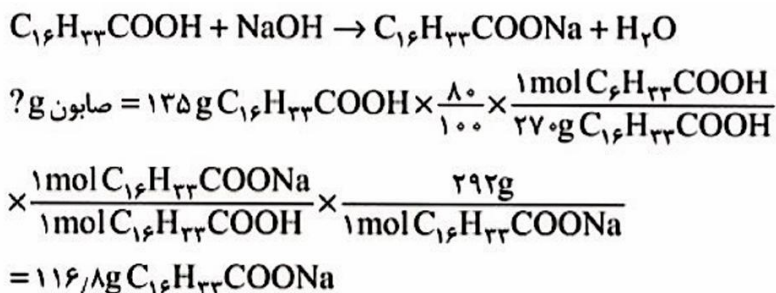
پاک کننده مورد نظر میتواند صابون مایع ($\text{C}_{16}\text{H}_{33}\text{COONH}_4$) و یا پاک کننده غیر صابونی ($\text{C}_{16}\text{H}_{33}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$) باشد.

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) پاک کننده مورد نظر $C_{16}H_{33}COOK$ و یا $C_{16}H_{33}COONH_4$ (است که در هر دو حالت شمار اتم های کربن موجود در ساختار پاک کننده برابر ۱۷ است.

(۳) برای اینکه پاک کننده مورد نظر با یونهای Mg^{2+} و Ca^{2+} موجود در آب سخت تولید رسوب نکند باید غیر صابونی باشد.

(۴) معادله واکنش تولید صابون جامد به صورت زیر است



سوال ۹۶ گزینه ۳



با توجه به اینکه pH دو محلول برابر است پس مولاریته اولیه اسید ضعیف HF نسبت به اسید قوی HI بیشتر بوده و چون حجم دو محلول نیز برابر است شمار مولهای اولیه HF از HI بیشتر بوده است پس در واکنش اسید HF با فلز مقدار گاز H_2 تولیدی در پایان واکنش بیشتر است.

بررسی سایر گزینه ها:

$$۱) K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \xrightarrow{[H^+]=[A^-]} 4 \times 10^{-6} = \frac{[A^-]^2}{0.1}$$

$$\Rightarrow [A^-] = 2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

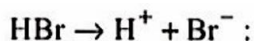
آنیون دواتمی موجود در محلول نیز، OH^- که غلظت آن برابر است با:

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

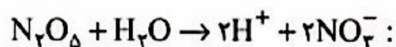
پس نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{[A^-]}{[OH^-]} = \frac{2 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-11}} = 4 \times 10^6$$

۲) اگر جرم اولیه هر ترکیب را برابر m گرم در نظر بگیریم، $[H^+]$ در محلول هر اسید برابر است با:



$$[H^+] = \frac{mg \text{ HBr} \times \frac{1 \text{ mol HBr}}{81 \text{ g HBr}} \times \frac{1 \text{ mol H}^+}{1 \text{ mol HBr}}}{1 \text{ L}} = \frac{m}{81}$$



$$[H^+] = \frac{mg \text{ N}_2\text{O}_5 \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{108 \text{ g N}_2\text{O}_5} \times \frac{2 \text{ mol H}^+}{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}}{1 \text{ L}} = \frac{m}{54}$$

توجه به اینکه $[H^+]$ در محلول حاصل از انحلال N_2O_5 در آب بیشتر است این محلول pH کمتری دارد.

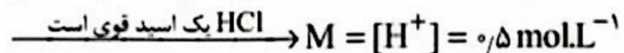
۴) با افزایش غلظت محلول HCN درجه یونش آن کاهش می یابد.

سوال ۹۷ گزینه ۱



قسمت اول: با توجه به اطلاعات داده شده در ابتدا محلول اسید به طور کامل خنثی نمیشود پس داریم:

$$pH = 0.3 \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-0.3} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$



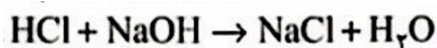
پس شمار مول های اولیه اسید موجود در محلول برابر است با:

$$? \text{ mol HCl} = 0.1 \text{ L محلول} \times \frac{0.5 \text{ mol HCl}}{1 \text{ L محلول}} = 0.05 \text{ mol HCl}$$

شمار مول NaOH اضافه شده به محلول برابر است با

$$\begin{aligned} ? \text{ mol NaOH} &= 400 \times 10^{-3} \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} \\ &= 0.01 \text{ mol NaOH} \end{aligned}$$

با توجه به معادله واکنش



شمار مول اسید باقیمانده برابر است با:

$$? \text{ mol HCl باقیمانده} = 0.05 - 0.01 = 0.04 \text{ mol HCl}$$

اکنون میتوان مقدار $[\text{OH}^-]$ موجود در محلول را محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} [\text{H}^+] &= \frac{n(\text{mol})}{V(\text{L})} = \frac{0.04}{0.1} = 0.4 \text{ mol.L}^{-1} \\ \frac{[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}}{\rightarrow} [\text{OH}^-] &= \frac{1}{4} \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1} \end{aligned}$$

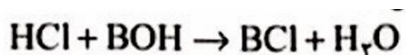
پس شمار یون های OH^- در محلول برابر است با:

$$\begin{aligned} ? \text{ OH}^- &= 0.1 \text{ L محلول} \times \frac{\frac{1}{4} \times 10^{-14} \text{ mol OH}^-}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ OH}^- \text{ یون}}{1 \text{ mol OH}^-} \\ &= 1.505 \times 10^{+9} \text{ OH}^- \text{ یون} \end{aligned}$$

قسمت دوم: مولاریته باز BOH برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{pH} = 13 &\Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1} \\ \frac{[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}}{\rightarrow} [\text{OH}^-] &= 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} [\text{OH}^-] = M\alpha \end{array} \right\} \\ \Rightarrow 10^{-1} &= M \times 0.1 \Rightarrow M = 1 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \end{aligned}$$

با توجه به معادله واکنش خنثی شدن:



حجم محلول باز مورد نیاز برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{محلول mL} = 0.04 \text{ mol HCl} \times \frac{1 \text{ mol BOH}}{1 \text{ mol HCl}} \times \frac{1 \text{ L محلول}}{1 \text{ mol BOH}} \\ \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 40 \text{ mL} \end{aligned}$$

سوال ۹۸ گزینه ۳



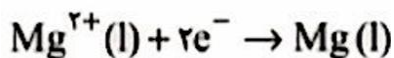
عبارت های (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی عبارت ها

(آ) با توجه به اینکه فلز A نسبت به فلز Fe کاهنده تر است میتوان از آن برای حفاظت از آهن در برابر خوردگی استفاده کرد.

(ب) با توجه به سلول گالوانی داده شده قدرت کاهندگی فلز B از فلز A کمتر است.

(پ) معادله نیم واکنش کاهش انجام شده در فرایند برقکافت نمک مذاب این فلز به صورت:



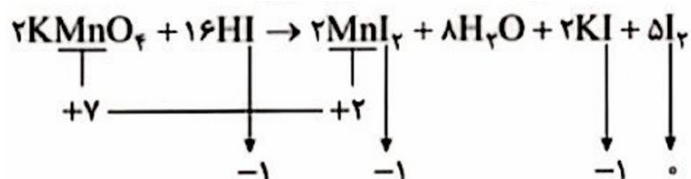
(ت) با توجه به اطلاعات داده شده نیم سلول B ، نیم سلول SHE است؛ با توجه به اینکه قدرت کاهندگی H_2 از فلز Cu بیشتر است پس در سلول گالوانی حاصل از نیم سلول های SHE و Cu نیم سلول SHE

نقش آند را داشته و کاتیون های موجود در محلول آن (H^+) با گذر از دیواره متخلخل به سمت کاتد میروند.

سوال ۹۹ گزینه ۱



معادله موازنه شده واکنش داده شده به صورت زیر است:



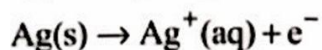
گونه اکسند در این واکنش KMnO_4 است که ضریب آن در معادله موازنه شده واکنش برابر ۲ است. در این واکنش در سمت واکنش دهنده ها ۱۶ اتم ید با عدد اکسایش (۱-) داریم و در سمت فراورده ها نیز همچنان عدد اکسایش یون های I^- برابر (۱-) است.

پس عدد اکسایش ۳۷/۵ درصد $(\frac{6}{100} \times 100)$ از اتمهای ید بدون تغییر باقی مانده است.

سوال ۱۰۰ گزینه ۲



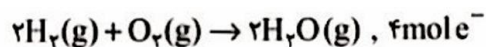
معادله نیم واکنش انجام شده در فرایند آبکاری به صورت:



ابتدا با توجه به اطلاعات داده شده شمار مول الکترون مبادله شده در این فرایند را محاسبه میکنیم است؛

$$\begin{aligned} ? \text{ mole} &= 1/5 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{5/4 \text{ g Ag}}{1 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ mol Ag}}{108 \text{ g Ag}} \times \frac{1 \text{ mole}}{1 \text{ mol Ag}} \\ &= 4/5 \text{ mole}^- \end{aligned}$$

با توجه به اینکه این مقدار الکترون از سلول سوختی هیدروژن اکسیژن تأمین شده است، میتوان جرم H_2 تولیدی در این سلول را محاسبه نمود:

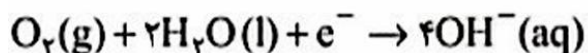


$$? g H_2 = 4/5 \text{ mole } e^- \times \frac{100}{60} \times \frac{2 \text{ mol } H_2}{4 \text{ mole } e^-} \times \frac{2 g H_2}{1 \text{ mol } H_2} = 7/5 g H_2$$

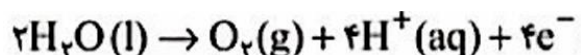
سوال ۱۰۱ گزینه ۳



معادله نیم واکنش کاهش انجام شده در فرایند زنگ زدن آهن به صورت:



است و معادله نیم واکنش انجام شده در قطب مثبت (آند) فرایند برقکافت آب نیز به صورت:



بررسی سایر گزینه ها

(۱) درست

(۲) فلز مورد نظر روی (Zn) است.

(۴) در فرایند هال آند گرافیتی بی اثر نبوده و مصرف میشود.

سوال ۱۰۲ گزینه ۱



علامت بار جزئی اتم کربن در کربونیل سولفید (SCO) و اتین (C_2H_2) به ترتیب مثبت و منفی است.

بررسی سایر گزینه ها

۲) در فرمول شیمیایی هر دو ترکیب سیلیسیم کربید (SiC) و سیلیس (SiO_2) ، دو نوع عنصر وجود دارد.

۳) هر دو ترکیب $CHCl_3$ و CCl_4 در دما و فشار اتاق مایع هستند.

۴) در ساختار هر دو ماده حلقه های شش گوشه شبکه ای همانند کندوی زنبور عسل پدید می آورند.

سوال ۱۰۳ گزینه ۲



برای افزایش کارایی مبدل کاتالیستی گاهی سرامیک را به شکل مش (دانه) های ریز در می آورند.

بررسی سایر گزینه ها

۱) هر سه واکنش انجام شده گرماده هستند.

۳) با زدن جرقه در مخلوطی از گازهای H_2 و O_2 ، E_a واکنش تأمین می شود.

۴) در حضور کاتالیزگر مقدار انرژی فعالسازی (E_a) کاهش می یابد در حالی که مقدار آنتالپی واکنش $|\Delta H|$ تغییری نمی کند.

سوال ۱۰۴ گزینه ۳



با افزودن مقداری $NaOH$ به سامانه رسوب $Mg(OH)_2$ تشکیل شده و در نتیجه با کاهش غلظت یون های Mg^{2+} ، تعادل در جهت رفت جابه جا میشود همچنین با افزودن به سامانه نیز رسوب $AgCl$ تشکیل شده و با کاهش غلظت Ag^+ ، تعادل در جهت برگشت جابه جا می شود.

بررسی سایر گزینه ها

(۱) با افزایش دما تعادل در جهت رفت جابه جا میشود و با این جابه جایی شمار مول مواد گازی موجود در سامانه افزایش می یابد.

(۲) با افزودن مقداری CO_2 به سامانه تعادل در جهت مصرف آن یعنی در جهت برگشت جابه جا میشود که با این جابه جایی CaO مصرف و $CaCO_3$ تولید میشود.

(۴) با افزایش فشار سامانه در جهت شمار مول گازی کمتر (رفت) جابه جا می شود. در این جابه جایی مواد واکنش دهنده مصرف شده و شمار مول آنها کاهش می یابد اما به دلیل افزایش فشار (کاهش حجم) غلظت همه مواد گازی در تعادل جدید بیشتر از تعادل اولیه خواهد بود.

سوال ۱۰۵ گزینه ۴



باز شدن شیر میان دو ظرف غلظت تعادلی مواد به صورت زیر خواهد بود.

	A	+	B	$\rightleftharpoons$	۲AB
مول اولیه	۰/۷		۰/۷		۰
تغییر مول	-x		-x		+۲x
مول تعادلی	۰/۷-x		۰/۷-x		۲x

$$K = \frac{[AB]^2}{[A][B]} \Rightarrow 64 \times 10^{-2} = \frac{\left(\frac{2x}{4}\right)^2}{\left(\frac{0.7-x}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 8 \times 10^{-1} = \frac{2x}{0.7-x} \Rightarrow x = 0.2 \text{ mol}$$

بنابراین مجموع غلظت واکنش دهنده ها در تعادل برابر است با:

$$[A] + [B] = \frac{0.5}{4} + \frac{0.5}{4} = 0.25 \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به اینکه شمار مول مواد گازی در دو طرف معادله واکنش برابر است. با تغییر فشار (حجم)، سامانه تعادلی جابه جا نمی شود و در نتیجه شمار مول مواد تغییری نمیکند اما به دلیل کاهش حجم ظرف غلظت AB تغییر می کند

$$[AB] = \frac{0.4}{2} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

پس نسبت خواسته شده برابر است: $0.8/0.2 = 4$